Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 1

Lehrgang über
Pfeilvektoren – Ortsvektoren - Koordinaten

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:
So kann man mit „Pfeilvektoren“ Geometrie treiben.

Viele grundlegende Aufgaben

Datei Nr. 63005

Demo-Text - ungekürzt

Stand 12. September 2015

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort !!!

Dieser Text ist entstanden, weil die Schulmathematik aus Zeitgründen immer mehr zusammengestrichen wird. Die Herleitungen und logischen Begründungen entfallen immer mehr. Stattdessen stehen Anwendungen auf dem Programm. Da nur wenige Mathematik studieren, verzichtet man offenbar immer mehr auf Theorie und versucht, durch Anwendungsaufgaben mehr die Motivation zu wecken und die Mathematik weniger trocken zu gestalten. Manche Lehrer scheinen diesen verordneten Kurswechsel zu brauchen.

Meine älteren Texte enthalten immer noch viele theoretische Hintergründe und werden dadurch für die im Unterricht weniger theoretisch geforderten Schüler schwerer lesbar. Daher schreibe ich zum gesamten Vektor-Geometrie-Stoff neue Texte, die viel anschaulicher vorgehen, also einfacher erscheinen, weil die Theorie der Anschauung Platz macht. Die alten Texte bleiben stehen.“

In diesem mehr praxisorientierten Text versuche ich zu veranschaulichen, warum man mit Pfeilklassen, die geometrische Vektoren sind, Geometrie betreiben kann. Dann werden die wichtigsten Aufgaben dieser Anfangsphase der Vektorgeometrie ausführlich erklärt.

Das Thema Geradengleichung wird hier noch nicht gestreift. Lesen Sie das Inhaltsverzeichnis durch!

Demo-Text - ungekürzt

Inhalt

Demo-Text - ungekürzt

1. Der Trick mit den Pfeilklassen

1.1 Das schlimme Wort „Vektor" – was steckt dahinter?

Das Wort **Vektor** hört sich für viele Schüler entsetzlich an, geheimnisvoll und schwer zu verstehen. Also müssen wir diesen Begriff zuerst verständlich machen.

Fachausdrücke sind nützlich, haben ihren Sinn darin, dass man durch sie ein ganzes Bündel von Eigenschaften oder Zusammenhängen erfassen kann. Wer die Bedeutung kennt, kann dann sofort Bezüge herstellen, nachdenken, verstehen.

So ist das auch mit dem Wort **Vektor**. Beginnen wir doch zuerst mit dem Wort **Algebra**. Dahinter versteckt sich die Lehre vom Rechnen mit Zahlen. Und natürlich viele Anwendungen dieser Rechnungen. Wer Algebra betreibt, der lernt früh, wie man addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert und potenziert. Dann kommt das Radizieren dazu, wozu man meist Wurzelziehen sagt.
Und so ganz nebenbei führt man immer neue Arten von Zahlen ein. Zuerst lernt man durch das Zählen die natürlichen Zahlen kennen. Dann kommt irgendwann die Null als Zahl dazu. Für kleine Kinder ein Phänomen, dass Null, was nichts zählt, auch eine Zahl sein soll. Dann braucht man Dezimalzahlen, denn *„5 Euro an 2 Kinder verteilen"* geht ohne die Dezimalzahl 2,5 nicht. Dann tauchen Brüche auf, denn wenn man eine Pizza in 3 Teile zerschneidet, gibt es Drittel! Ja, und dann erzählen einem die Mathelehrer, dass man Zahlen wie $\sqrt{2}$ benötigt, oder viel Schlimmeres, wie die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e. Diese beiden sind extrem wichtig aber kaum zu verstehen. Niemand kennt sie genau, und man kann sie auch nicht als Lösung einer der üblichen Gleichungen bekommen. Das alles passiert in der Algebra, weil man sich dort das Ziel gesetzt hat, möglichst viele Aufgaben (sprich Gleichungen) lösen zu können.

In der **Geometrie** kann man konstruieren, abmessen und spezielle Lagen wie parallel und senkrecht angeben. Um Punkte, Strecken, Geraden, Kreise usw. genauer handhaben zu können, entstand die Idee, die Lage von Punkten durch Zahlen zu erfassen. Dazu hat man das Achsenkreuz, also Koordinatensysteme eingeführt. Damit kann man die Lage etwa des Punktes A mit den Koordinaten $(3 \mid -2)$ festhalten. Im Raum braucht man natürlich drei Koordinaten, denn man muss ja irgendwie aus der x-y-Ebene herauskommen und in die Höhe oder in die Tiefe gehen.

Kluge Mathematiker haben dann bemerkt, dass man mit Pfeilen ganz tolle Dinge anstellen kann, denn ein Pfeil von einem Punkt A von einem Punkt B hat ja eine ganz bestimmte Richtung und Länge. Und damit kann man viel Nützliches anstellen. Jetzt kommen **Vektoren** ins Spiel.

Zunächst einmal müssen Vektoren mit der Geometrie gar nichts zu tun haben. Sie sind etwas ganz Allgemeines, das man sich zunächst nicht einmal vorstellen muss, wenn man sie etwa so definiert:

> Vektoren sind die Elemente einer Menge V (diese Menge nennt man den Vektorraum), mit denen man nach *„bestimmten"* Regeln rechnen kann.

Demo-Text - ungekürzt

Wenn also ein Mathematiker davon spricht, dass er mit Vektoren arbeitet, dann sagt uns das zunächst nur, dass er mit irgendwelchen Objekten bestimmte Rechnungen ausführen kann. Das klingt doch so, als ob wir plötzlich wieder Algebra betreiben. Und dies stimmt auch. Die Vektorrechnung gehört zur Algebra. Man nennt **Vektorrechnung** auch **Lineare Algebra**. Das kommt daher, dass dort alles mit linearen Gleichungen berechnet wird, also keine Quadrate usw. vorkommen.

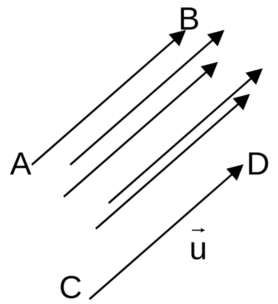
Im Text 61101 wurde mit Zahlenpaaren und Tripeln gearbeitet. Dort wurde gezeigt, dass man sie addieren und subtrahieren kann, sogar Vielfache kann man bilden. Und wir haben Rechengesetze untersucht. Dort wurde also bereits eine „abstrakte" Art von Vektoren eingeführt.

Hier geht es um eine geometrische Sorte von „Vektoren", die den Namen „Vektoren" tragen dürfen, weil man mit ihnen nach den Regeln eines Vektorraums rechnen kann. Ihr Vorteil liegt auf der Hand: Man kann sie zur rechnerischen Erfassung der Geometrie verwenden. Diese Vektoren haben etwas mit Pfeilen zu tun. Ich will aber gleich vorwarnen: Schüler verwechseln dies schnell und meinen dann Pfeile sind Vektoren. Falsch! Was dann aber dahinter steckt, folgt im nächsten Abschnitt.

Demo-Text - ungekürzt

1.2 Pfeilklassen sind auch Vektoren, Pfeile aber nicht.

Was jetzt kommt, hat man so eingerichtet, damit man viele Dinge erreichen kann.
Unter diesem Aspekt muss man alles betrachten.



Rechts sind 6 Pfeile abgebildet. Sie haben alle exakt dieselbe Richtung und dieselbe Länge. Von dieser Sorte gibt es unendlich viele.
Die Menge all dieser Pfeile (die alle dieselbe Richtung und Länge besitzen) nennt man eine **Pfeilklasse** oder einen Pfeilvektor und ordnet ihr eine Bezeichnung zu, hier ist es ein u mit einem Pfeil: $\vec{u}$.

Definition: Unter einer **Pfeilklasse** versteht man die (unendlich große) Menge an Pfeilen (in der Ebene oder im Raum), die gleiche Länge und gleiche Pfeilrichtung haben.

Die abgebildeten Pfeile sind "**parallelgleich**" und gehören somit alle zur selben Pfeilklasse.
Jeder einzelne dieser Pfeile ist ein Repräsentant dieser Pfeilklasse (wir sagen künftig einfach Vektor dazu). Man könnte diesen Vektor dann so schreiben: $\vec{u} = \left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots\right\}$
Dennoch findet man ständig diese Schreibweise: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Das heißt **nicht:** Der Vektor $\vec{u}$ ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$. Denn $\overrightarrow{AB}$ ist nur ein Pfeil, also kein Vektor.
Aber es soll heißen: $\overrightarrow{AB}$ **ist ein Pfeil des Vektors** $\vec{u}$.

Die richtige Schreibweise wäre eigentlich $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$. Aber diese ist *leider* nicht üblich.

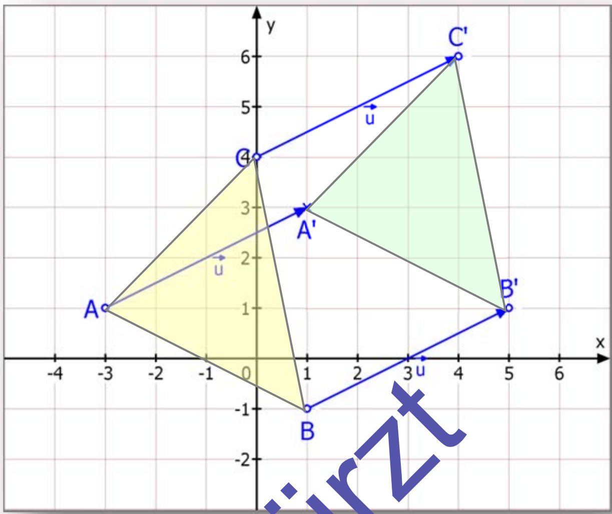
Warum ist dies schlampig? Weil sehr schnell Schüler meinen, dass Vektoren immer etwas mit Pfeilen zu tun haben. Dagegen sollte man sich merken, dass Pfeilklassen nur eine Sorte von Vektoren sind. Es gibt andere, die keine solche geometrische Bedeutung haben.

Vektoren sollen ein Hilfsmittel sein, um gewisse nützliche Dinge zu treiben. Ein einzelner Pfeil wird ja durch seinen Anfangspunkt und seinen Endpunkt festgelegt. Er hat also eine ganz feste Lage. Wenn ich diesen Pfeil woanders einzeichne, ist es nicht mehr derselbe Pfeil, sondern ein neuer Pfeil. Pfeile sind also ortsfest und daher nicht flexibel zu behandeln. Denken wir an eine große Firma. Diese hat bestimmte Gremien, also Mengen von Personen, die eine bestimmte Aufgabe durchführen. Heute früh war ich im Autohaus, um eine Serviceleistung an meinem PKW in Auftrag zu geben. Wenn die nur einen Mechaniker hätten, müsste ich vielleicht 4 Tage auf die Ausführung meines Wunsches warten. Weil sie aber 9 haben, kann man den dazu geeigneten Herrn beauftragen, die Arbeit auszuführen. Die Menge der Serviceleute ist praktisch wie ein Vektor, wie eine Pfeilklasse, genauer eine „Mechanikerklasse". Und jeder einzelne davon ist dann ein Repräsentant der Werkstatt und kann herangezogen werden. So ist das mit Pfeilklassenvektoren. Es gibt in jeder Pfeilklasse beliebige viele Pfeile, und ich kann den auswählen, den ich jetzt gerade gebrauchen kann.

Demo-Text - ungekürzt

1.3 Beispiele

1. Eine Verschiebung soll laut Vorschrift alle Punkte der Zeichenebene bewegen. Und zwar alle um die gleiche Strecke in dieselbe Richtung.



Dies kann man durch Pfeile kennzeichnen.
Rechts wurde ein Dreieck verschoben.
Die zu den drei Eckpunkten gehörenden Pfeile sind eingezeichnet.

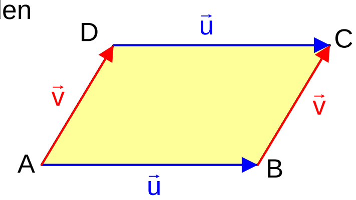
Alle drei Pfeile gehören zum Vektor $\vec{u}$.
Diesen Vektor kann man zahlenmäßig so erfassen: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Das soll bedeuten: Alle seine Pfeile zeigen um 4 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung.

Damit werden dann unendlich viele Pfeile erfasst. Diese sogenannten Vektorkoordinaten geben also nicht die Lage des Vektors $\vec{u}$ an, sondern seine Art, nämlich Richtung und zugleich die Länge.
Wir werden bald lernen, wie einfach man dann aus den Koordinaten des Anfangsdreiecks die des Bilddreiecks berechnen kann, nur mit diesem einen Vektor und seinen Koordinaten.

2. Parallelogramme sind Figuren, die sich für die Vektorrechnung geradezu anbieten.

Man sollte wissen, dass bei diesem Viereck die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sind.



Also gehören die Pfeile $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ zum gleichen Vektor $\vec{v}$.
und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ gehören zum Vektor $\vec{u}$.

Leider hat man noch eine **Schreibweise** eingeführt, die **irreführend** ist:

Man schreibt: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Das heißt **nicht**, **dass diese Pfeile gleich sind**.
Sie sind es nicht, denn sie haben ja eine andere Lage.
Diese Schreibweise bedeutet, **dass diese Pfeile zum gleichen Vektor gehören!**

Ferner gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (Beide Pfeile gehören zum gleichen Vektor, zu $\vec{u}$.)
Zu unserem Parallelogramm gehören also zwei Vektoren, die durch je zwei Pfeile dargestellt sind.

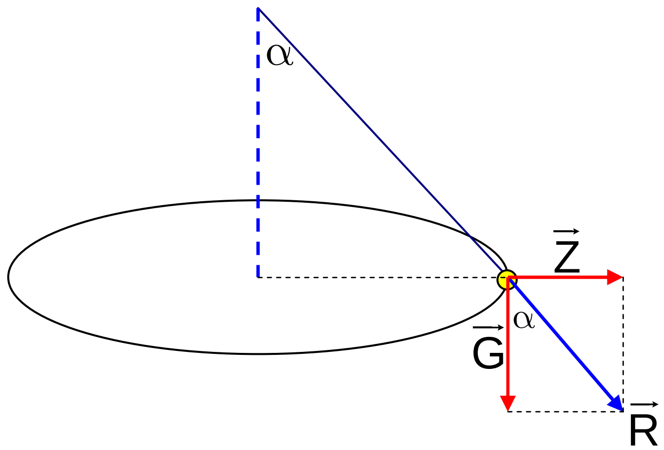
Demo-Text - ungekürzt

1.4 Addition von Pfeilklassenvektoren

Wir machen zunächst einen Ausflug in die Physik, wo man auch mit Vektoren arbeitet.

Dort ergibt sich eine Notwendigkeit, die ich gerne als Einstieg übernehme.

BEISPIEL 1 Überlagerung von Kräften am Fadenpendel



Eine punktförmige Masse bewegt sich an einem masselosen Faden auf einer Kreisbahn. Zwei Kräfte beeinflussen den ganzen Bewegungsablauf. Zum einen wirkt durch die Kreisbewegung die Zentrifugalkraft Z auf den Körper (sie zieht ihn nach außen) - zum andern wirkt natürlich die Gravitationskraft und erzeugt die Gewichtskraft G nach unten. Beide Kräfte überlagern sich so, dass sich die resultierende Kraft R ergibt. Diese hat die Richtung der Diagonalen im Kräfteparallelogramm aus Z und G, das in diesem Fall ein Rechteck ist. R zieht die Pendelmasse (gelb) unter dem Winkel α nach schräg rechts unten. Daher stellt sich das ganze Fadenpendel unter diesem Winkel ein, d.h. der Winkel α tritt oben an der Aufhängung noch einmal auf.

Demo-Text - ungekürzt

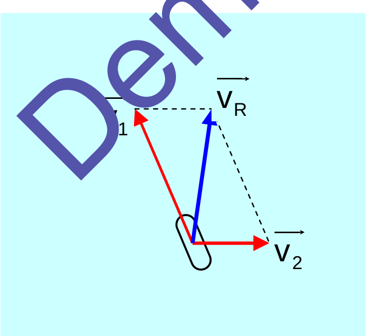
Die Physiker sprechen nicht nur von der Überlagerung der Kräfte, sondern nennen es Kräfteaddition und schreiben: $\vec{R} = \vec{G} + \vec{Z}$. Dass es sich hier nicht einfach um eine Addition im herkömmlichen Sinne, sondern um etwas ganz Neues handelt, das nur diesen Namen trägt, ist erkennbar.

Den Summenvektor $\vec{R}$ kann man als Diagonale im Rechteck konstruieren.

Man kann den Winkel α trigonometrisch berechnen und die Größe (Betrag) dieser Kraft über den Satz des Pythagoras:

$$\tan\alpha = \frac{Z}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{Z^2 + G^2}\,.$$

BEISPIEL 2 Überlagerung von Geschwindigkeiten

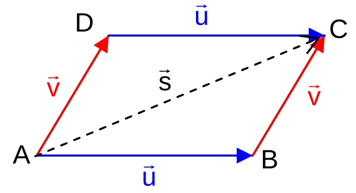


Ein Boot fährt mit der Geschwindigkeit v_1 über einen Fluss. Die Richtung wird durch den Pfeil festgelegt. Der Fluss hat eine Strömungsgeschwindigkeit v_2. Beide überlagern sich zur resultierenden Geschwindigkeit v_R. Seine Richtung wird durch die Diagonale des Parallelogramms definiert, und seine Länge durch die Länge der Diagonalen. Durch Größe und Richtung wird die Geschwindigkeit in der Physik auch zu einer Art Vektor, und man schreibt:

$$\overrightarrow{v_R} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$

Auch hier kann man mit der Trigonometrie die Winkel und Pfeillängen (also Geschwindigkeitsbeträge) berechnen.

Addition von Vektoren mittels Parallelogramm:



Der erste Vektor $\vec{u}$ verschiebt den Punkt A nach B.
Der zweite Vektor $\vec{v}$ verschiebt B nach C.
Ersetzt man diese beiden nacheinander ausgeführten Verschiebungen durch eine einzige, die A direkt nach C verschiebt, dann benötigt man dazu den dritten Vektor $\vec{s}$.
Dieser stellt die Gesamtverschiebung dar, weshalb man $\vec{s}$ auch den **Summenvektor** aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

Dieser Figur entnimmt man jetzt **dreierlei Konstruktionsmöglichkeiten für einen Summenvektor**:

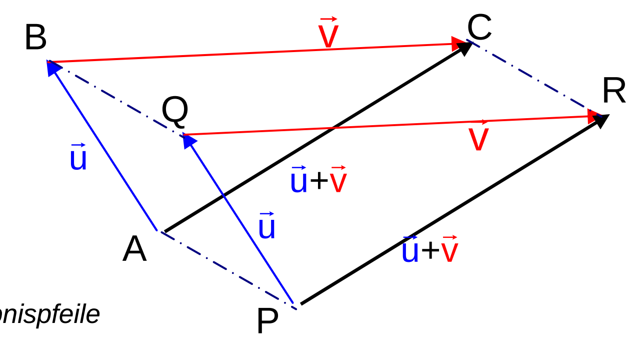
1. Um <u>einen</u> Pfeil des Vektors $\vec{u}+\vec{v}$ zu zeichnen, beginnt man mit einem beliebigen Pfeil des Vektors $\vec{u}$ und hängt an seinen Endpunkt den Pfeil des Vektors $\vec{v}$ an, der dort seinen Anfangspunkt besitzt.

2. Man erkennt auch, dass man die Reihenfolge der beiden Summanden vertauschen kann: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
Also kann man auch mit irgendeinem Pfeil von $\vec{v}$ beginnen, hängt dann den passenden Pfeil von $\vec{u}$ an seinen Endpunkt und erhält so einen Pfeil des Summenvektors $\vec{u}+\vec{v}$.

3. Die <u>Parallelogramm-Methode</u> ist ebenfalls sehr gebräuchlich. Dazu wählt man zwei Pfeile von $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die denselben Anfangspunkt besitzen (hier war es A).
Die beiden Pfeile ergänzt man zu einem Parallelogramm. Der Pfeil, der zu der Diagonalen gehört, die beim gemeinsamen Anfangspunkt der Pfeile von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beginnt, gehört zum Summenvektor $\vec{u}+\vec{v}$

Diese Formulierungen sollte man üben, damit man in der Lage ist, verbal einigermaßen richtig die Vektoraddition zu erklären.

Wichtig: *Die Addition zweier Vektoren kann man an jedem Startpunkt ausführen.*
Mit anderen Worten: Das Ergebnis hängt nicht davon ab, welchen Pfeil man wählt.



Man kann das so erkennen:
Beginnt man die Additionskonstruktion bei A, dann wird $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Beginnt man sie beim Startpunkt P, dann wird $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
Man erkennt schnell, dass in dieser Figur viele Parallelogramme auftreten, daher sind die Ergebnispfeile $\overrightarrow{AC}$ *und* $\overrightarrow{PR}$ *parallel und gleich lang, gehören also zum gleichen Summenvektor. Also ist es egal, an welchem Punkt man mit der Konstruktion beginnt.*

Demo-Text - ungekürzt

Konstruktionsübungen zur Vektoraddition

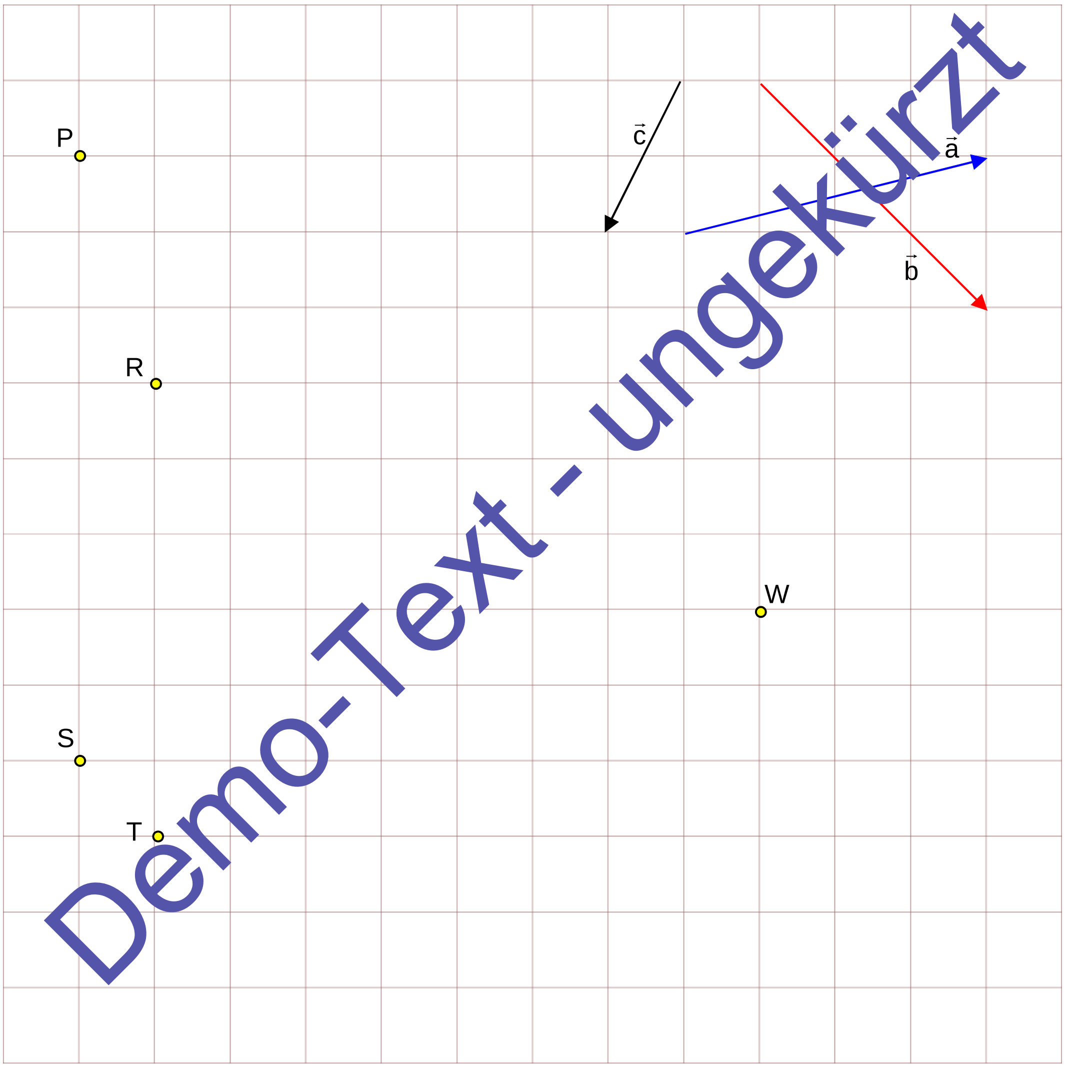
Aufgabe 1

In folgender Abbildung sind drei Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt.

a) Konstruiere einen Pfeil des Summenvektors $\vec{a}+\vec{b}$ von P aus und nochmals von R aus.

b) Konstruiere einen Pfeil des Summenvektors $\vec{b}+\vec{c}$ von W aus.

c) Konstruiere einen Pfeil des Summenvektors $\vec{a}+\vec{c}$ von S aus und nochmals von T aus.

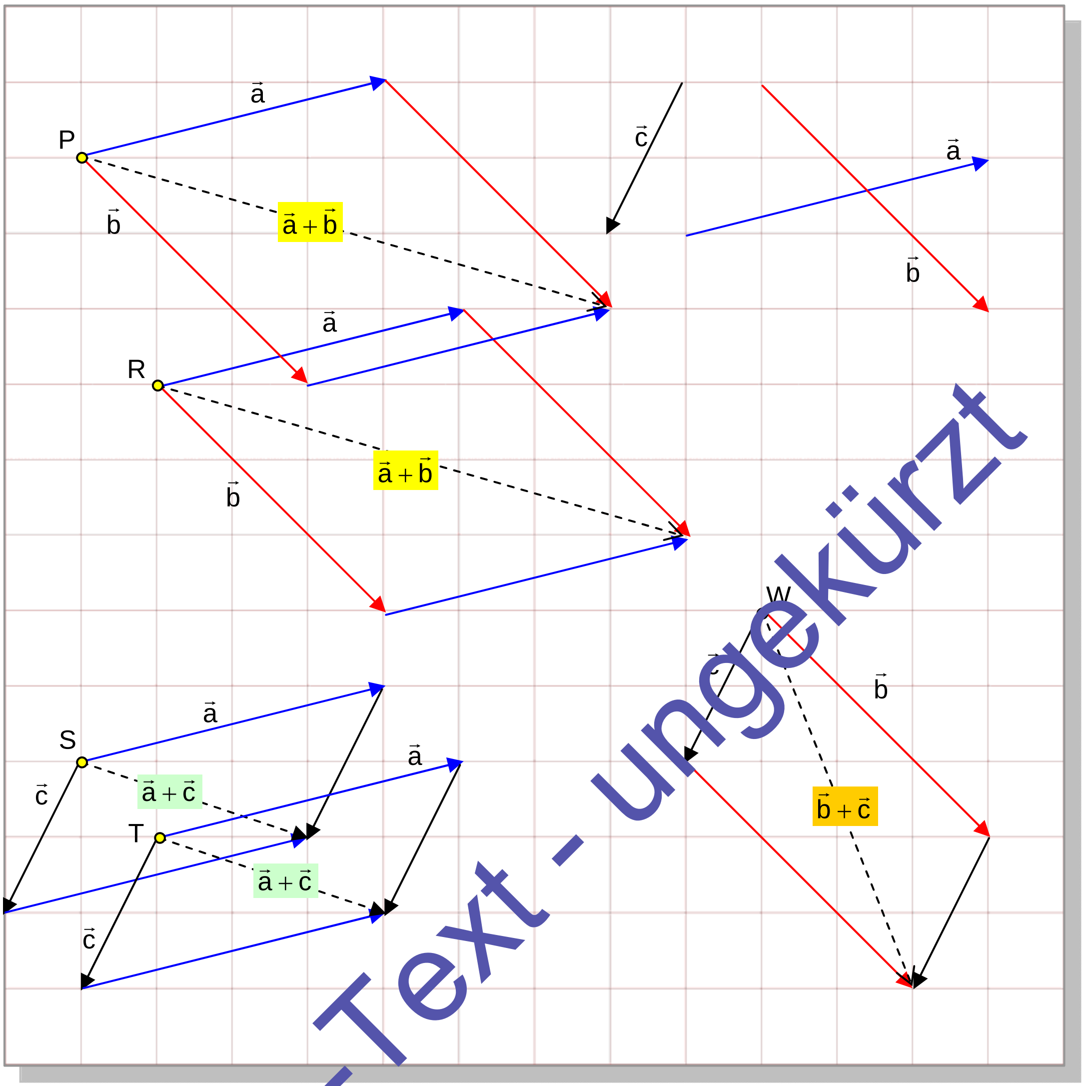


Demo-Text - ungekürzt

Wenn du in a) und c) die Summenvektoren wie verlangt zweimal konstruiert hast, sollte dir etwas aufgefallen sein. Formuliere dies bitte:

Welche Erkenntnis zieht man daraus?

Lösung:



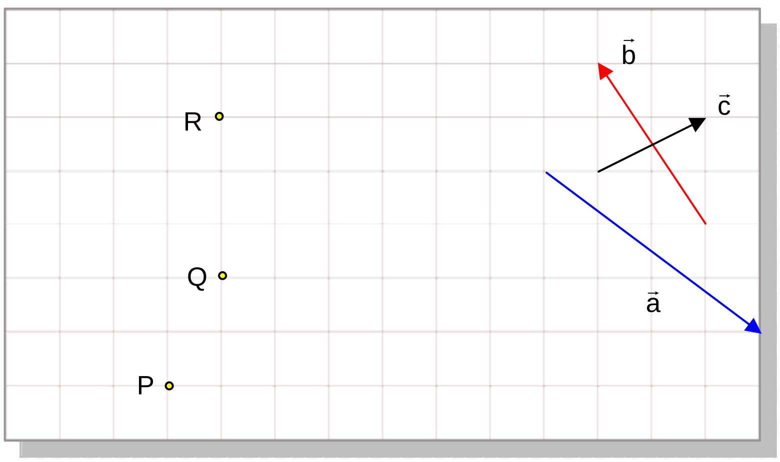
Es sollte auffallen, dass man in a) und c) bei Konstruktion des Summenvektors von verschiedenen Anfangspunkten aus stets Summenpfeile bekommt, die gleich lang sind und dieselbe Richtung haben.

Mit anderen Worten: Ob man den Summenvektor $\vec a + \vec b$ von P aus oder von R aus konstruiert, ist egal. Man erhält zwar verschiedene Pfeile, aber sie gehören zum gleichen Vektor.

Demo-Text - ungekürzt

Aufgabe 2

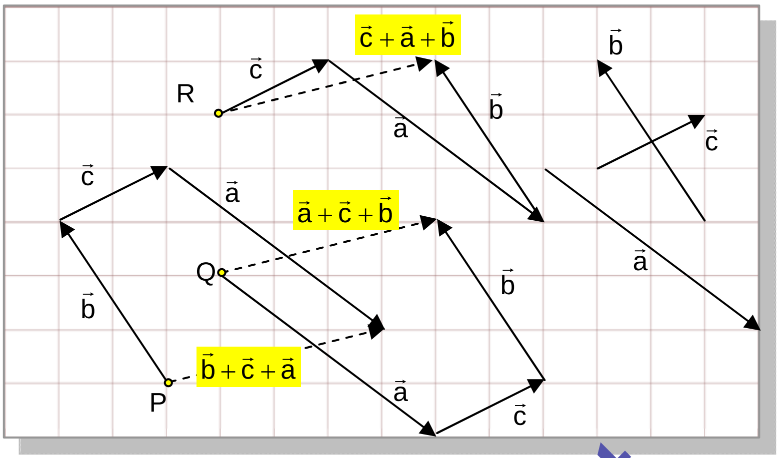
Gegeben sind drei Vektoren:
Konstruiere durch Aneinanderfügen von geeigneten Pfeilen
von P aus einen Pfeil von $\vec b + \vec c + \vec a$;
von Q aus einen Pfeil von $\vec a + \vec c + \vec b$
von R aus einen Pfeil von $\vec c + \vec a + \vec b$.
Was beobachtet man?



Lösung:

Man beobachtet, dass man in jedem Fall einen anderen Pfeil **desselben Vektors** bekommt.

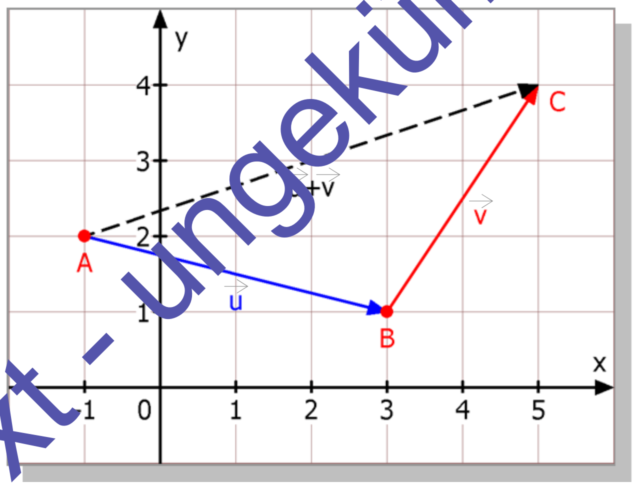
Man darf Vektoren bei der Addition vertauschen.



Nun wollen wir sehen, wie sich die Koordinaten verhalten, wenn man Vektoren im Koordinatensystem addiert:

Ein Beispiel genügt:

Es sei $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.



Das heißt, dass alle Pfeile des Vektors $\vec{u}$ von ihrem Anfangspunkt aus um 4 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung, also um 1 nach unten zeigen.

Und alle Pfeile des Vektors $\vec{v}$ zeigen von ihrem Anfangspunkt aus um 2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung, also nach oben.

Die Konstruktion zeigt, dass man die Koordinaten des Summenvektors durch Addition der Vektorkoordinaten berechnen kann:

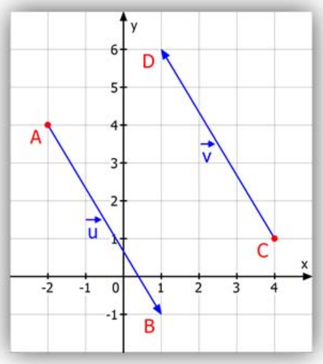
$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$ stimmt mit der Abbildung überein!

Ohne dies näher beweisen zu wollen, können wir sagen, dass man so rechnen darf.

$\boxed{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}}$. Man schreibt auch: $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Dabei kann folgendes vorkommen:

Gegeben sind $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. Dann folgt: $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.



Nebenstehende Abbildung zeigt den Pfeil $\overrightarrow{AB}$, der zu $\vec{u}$ gehört, und den Pfeil $\overrightarrow{CD}$, der zu $\vec{v}$ gehört. Für die Addition $\vec{u}+\vec{v}$ muss man mit dem Pfeil $\overrightarrow{AB}$ beginnen und **dann den Pfeil von $\vec{v}$ wählen**, der in B beginnt. Er führt natürlich genau wieder zu A zurück.

Man kann das so schreiben: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{o}$.

Die Summe ist dann der **Nullvektor**, der „jede Richtung“ hat, aber nicht als Pfeil sichtbar ist, weil seine Länge Null ist.

Demo-Text - ungekürzt

1.5 Subtraktion von Pfeilklassenvektoren

Jeder kennt vom Zahlenrechnen, dass man die Addition zu einer Subtraktion umkehren kann:

Aus der Addition $5+3=8$

folgt durch Umstellung: $8-3=5$

Dasselbe tun wir jetzt mit Vektoren:

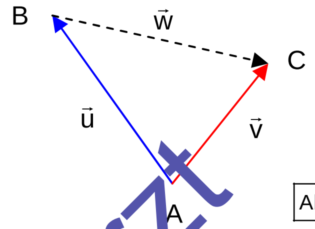


Abb. 1

Wenn man die Abbildung genau studiert, erkennt man, dass die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ durch eine Summe miteinander verknüpft sind: Es gilt: $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$.

Durch Umstellung folgt daraus: $\boxed{\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}}$

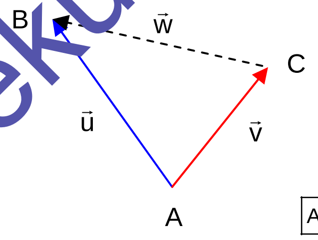


Abb. 2

In der nächsten Abbildung hat der Vektor $\vec{w}$ die entgegen gesetzte Richtung. Jetzt kann man diese Summe entdecken: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}$.

Durch Umstellung folgt daraus: $\boxed{\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}}$

Wir haben jetzt einfach eine Vektorsubtraktion aufgeschrieben, ohne zu wissen, was sie bedeutet. Wir machen es uns damit leicht, erkennen aber aus den beiden Abbildungen, wie man einen Pfeil eines Differenzvektors finden kann:

1. Schritt. **Man braucht von den Vektoren, die man subtrahieren will, zwei Pfeile mit dem gleichen Anfangspunkt.**

2. Schritt: Verbinde die Pfeilspitzen:

Zeigt der Verbindungspfeil von $\vec{u}$ nach $\vec{v}$, gehört der Pfeil zu $\vec{v}-\vec{u}$.

In Abb. 1 haben wir also $\vec{w}=\vec{v}-\vec{u}$ konstruiert.

Zeigt der Verbindungspfeil von $\vec{v}$ nach $\vec{u}$, gehört der Pfeil zu $\vec{u}-\vec{v}$.

In Abb. 2 haben wir also $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$ konstruiert.

Demo-Text - ungekürzt

Weitere Beispiele:

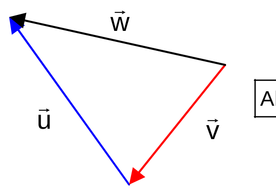


Abb. 3

Abb. 3 zeigt die Konstruktion des Differenzvektors $\vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$.

Abb. 4 zeigt: $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$

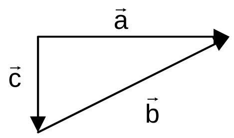


Abb. 4

Abb. 5 zeigt: $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$.

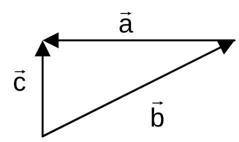


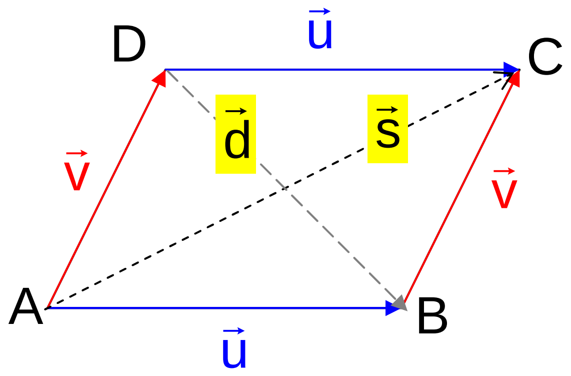
Abb. 5

Wenn ein Pfeil die Spitzen zweier Pfeile mit gemeinsamem Anfangspunkt verbindet, liegt ein Differenzvektor vor!

Noch zwei Zusätze:

1. Vektoren kann man zahlenmäßig subtrahieren: $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Interessant ist auch diese **Parallelogrammfigur**:



Man sagt: Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ „spannen" das Parallelogramm auf, weil ihre Pfeile einen gemeinsamen Anfangspunkt besitzen.

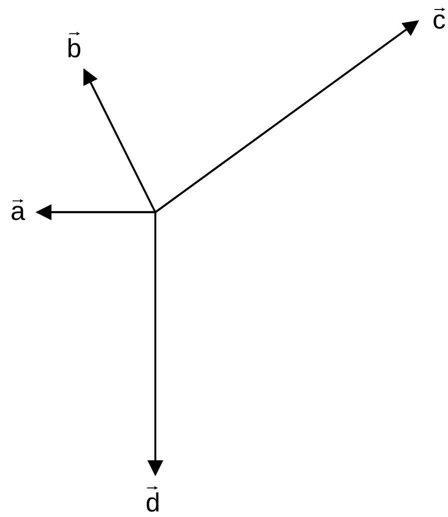
Der zur <u>Hauptdiagonale</u> gehörende Pfeil $\overrightarrow{AC}$ gehört zum **Summenvektor** $\vec{u} + \vec{v}$.

Der zur <u>Nebendiagonale</u> gehörende Pfeil $\overrightarrow{DB}$ gehört zum **Differenzvektor** $\vec{u} - \vec{v}$,
für den umgekehrten Pfeil gilt: $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$.

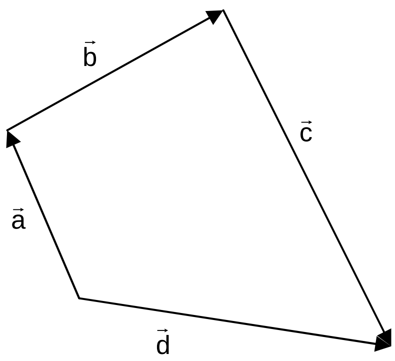
Demo-Text - ungekürzt

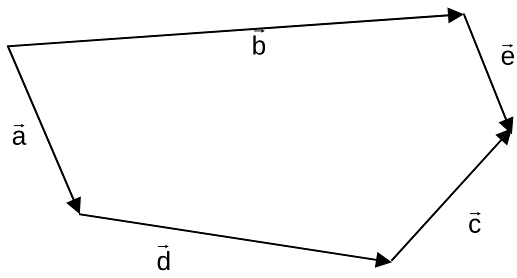
Aufgabe 3: Konstruktionsübungen zu Differenzvektoren:

(1) Drucke diese Seite aus und trage in nebenstehende Abbildung sechs Pfeile ein, die zu Differenzvektoren gehören.
Beschrifte sie als Differenz, z. B: $\vec{c} - \vec{a}$.



(2) In jeder der folgenden Figuren ist ein Vektor als Differenz durch andere Vektoren darstellbar.
Führe dies aus:

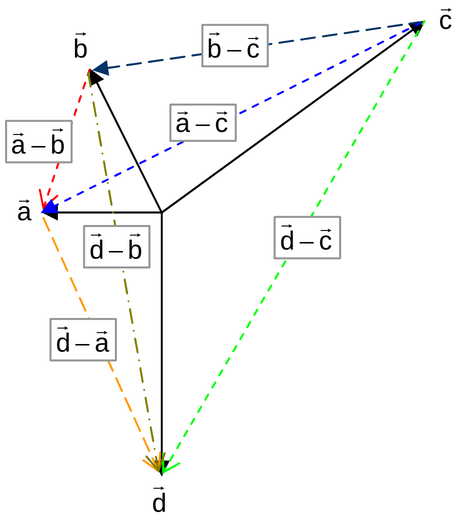


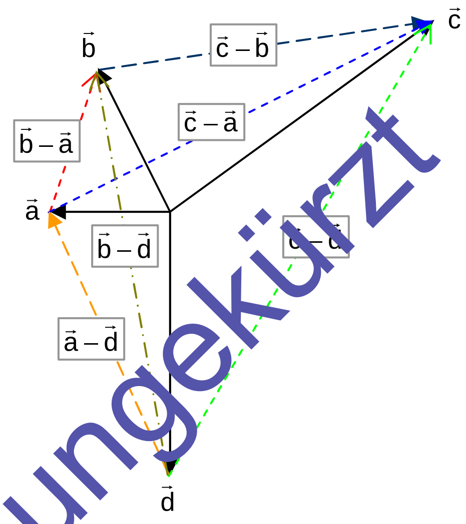


Lösung zu Aufgabe 3 (Konstruktionsübungen):

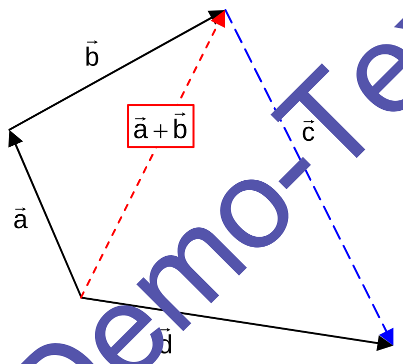
Die vier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ führen vom gemeinsamen Anfangspunkt P aus zu vier Endpunkten. Verbindet man diese durch Strecken, erhält man vier Vierecksseiten und zwei Diagonalen.

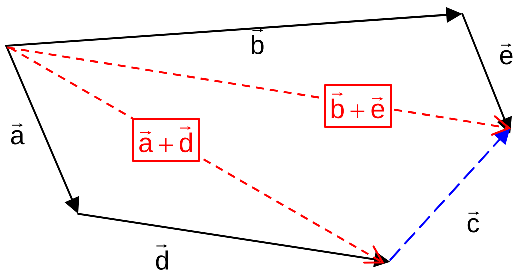
Versieht man diese sechs Strecken mit Pfeilen, kommt man auf 12 mögliche Differenzvektoren, die in diesen beiden Abbildungen dargestellt sind.





(2) In jeder der folgenden Figuren ist ein Vektor als Differenz durch andere Vektoren darstellbar.





Hier ist $\vec{c} = \vec{d} - (\vec{a} + \vec{b})$

Hier ist $\vec{c} = (\vec{b} + \vec{e}) - (\vec{a} + \vec{d})$

Das war schwer?

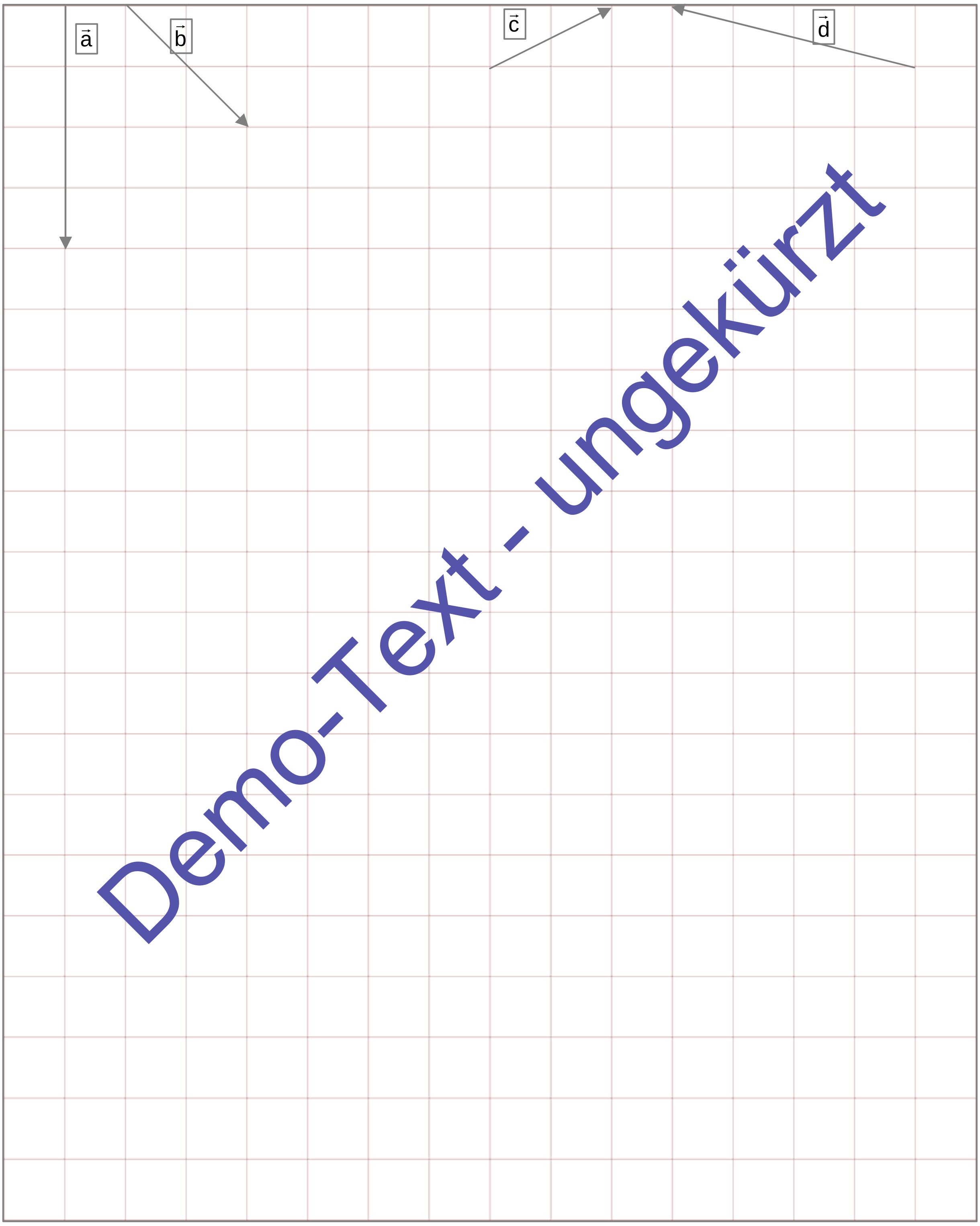
Demo-Text - ungekürzt

Aufgabe 4 Vektor-Konstruktionen

Hier sind vier Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ **dargestellt.**

Bestimme dazu je einen Pfeil der folgenden Vektoren. Lege den Startpunkt selbst fest.

$\vec{a}+\vec{c}, \quad \vec{a}-\vec{c}, \quad -\vec{b}+\vec{d}, \quad -\vec{a}-\vec{b}, \quad \vec{d}-\vec{a}, \quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{d}, \quad \vec{b}-\left(\vec{d}+\vec{c}\right), \quad \left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c}, \quad \vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right), \quad \left(\vec{a}-\vec{c}\right)-\vec{b}$



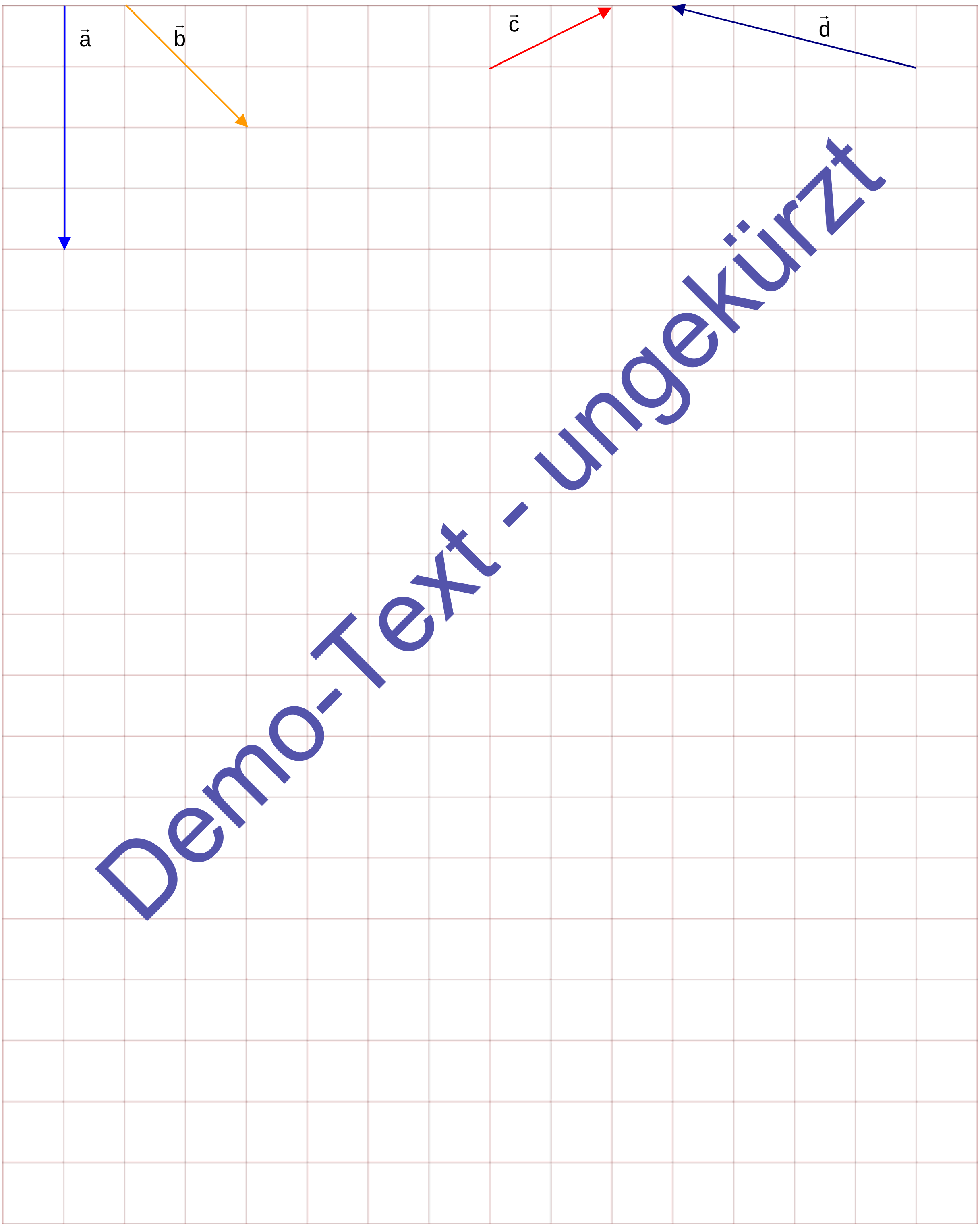
Demo-Text - ungekürzt

Aufgabe 5 Vektor-Konstruktionen

Hier sind vier Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ dargestellt.

Bestimme dazu je einen Pfeil der folgenden Vektoren. Lege den Startpunkt selbst fest.

$$\vec{b}-\left(\vec{d}+\vec{c}\right),\quad \left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c},\quad \vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right),\quad \left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c}$$



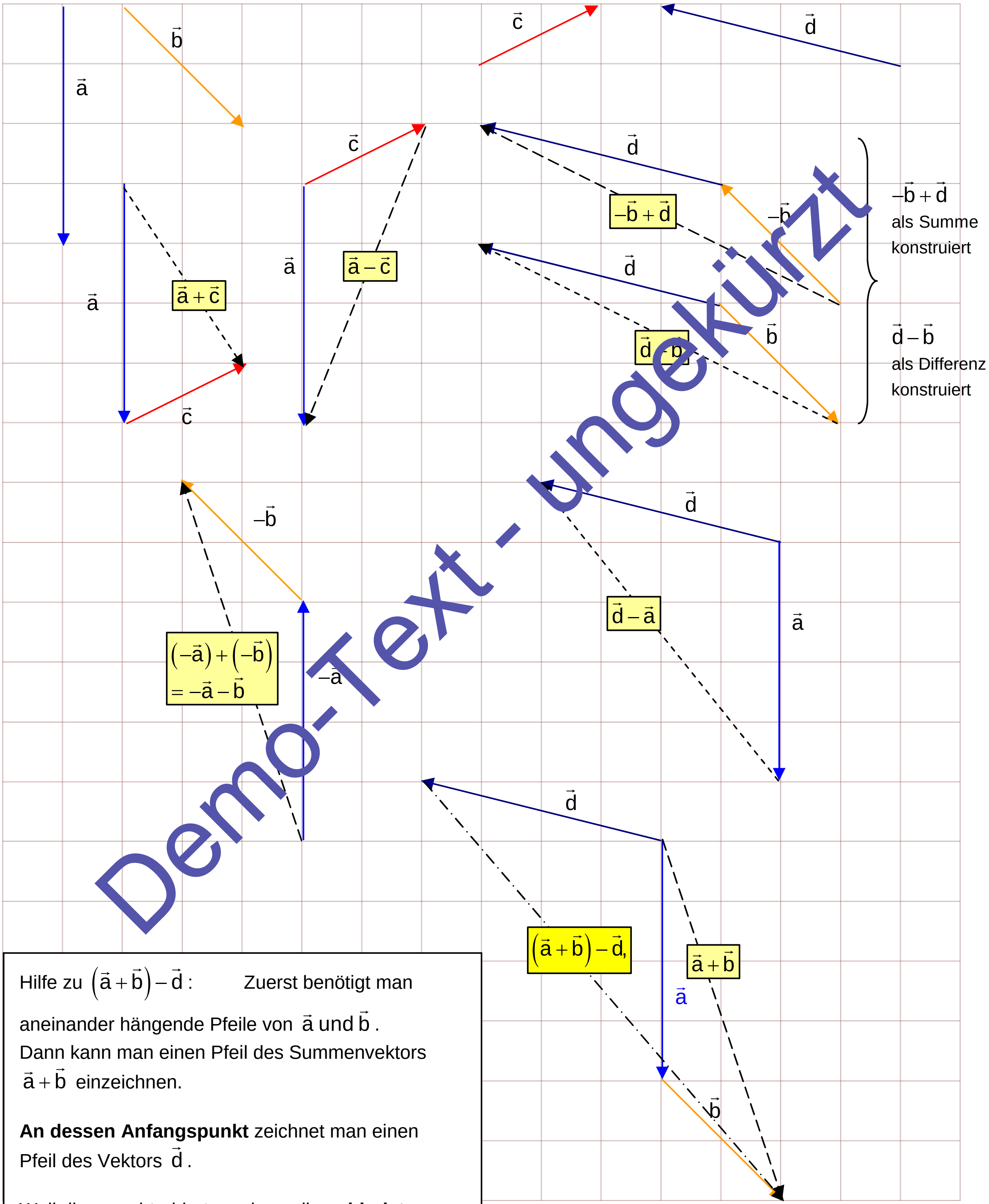
Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 4

Gegeben sind vier Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$.

Zeichne je einen Pfeil der folgenden Vektoren:

$\vec{a}+\vec{c},\quad \vec{a}-\vec{c},\quad -\vec{b}+\vec{d},\quad -\vec{a}-\vec{b},\quad \vec{d}-\vec{a},\quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{d},\quad \vec{b}-\left(\vec{d}+\vec{c}\right),\ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\vec{c},\quad \vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right),\quad \left(\vec{a}-\vec{c}\right)-\vec{b}$



Demo-Text - ungekürzt

Hilfe zu $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{d}$: Zuerst benötigt man aneinander hängende Pfeile von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann kann man einen Pfeil des Summenvektors $\vec{a}+\vec{b}$ einzeichnen.

An dessen Anfangspunkt zeichnet man einen Pfeil des Vektors $\vec{d}$.

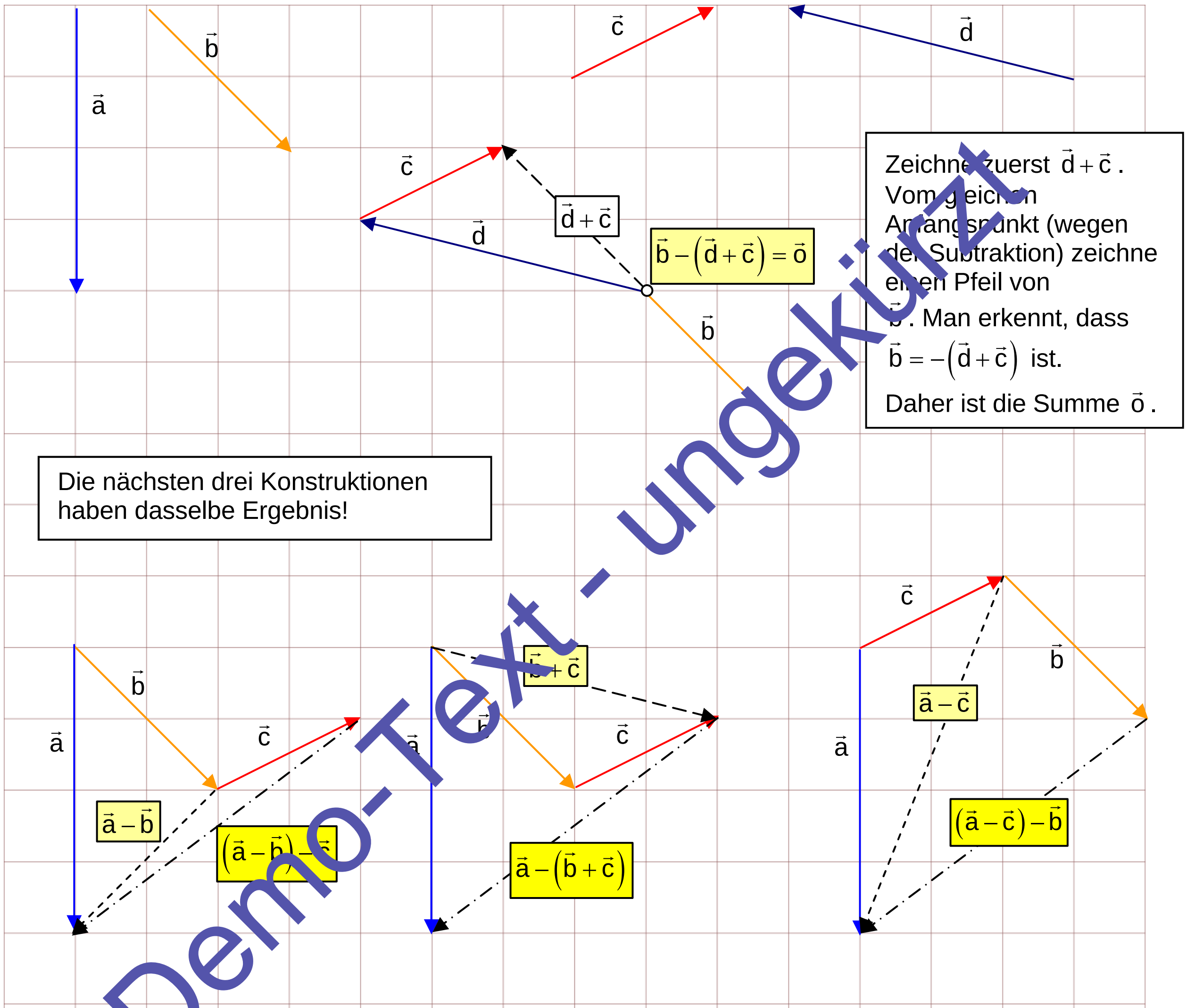
Weil dieser <u>subtrahiert</u> werden soll, **verbindet man die Spitzen** und setzt die Pfeilspitze an den Endpunkt von $\vec{a}+\vec{b}$.

Lösung Aufgabe 5

Gegeben sind vier Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$.

Zeichne je einen Pfeil der folgenden Vektoren:

$$\vec{b}-(\vec{d}+\vec{c}),\quad (\vec{a}-\vec{b})-\vec{c},\quad \vec{a}-(\vec{b}+\vec{c}),\quad (\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$$



Demo-Text - ungekürzt

Zuerst braucht man für die Subtraktion zwei Pfeile von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit gleichem Anfangspunkt. Dann verbindet man ihre Endpunkte, Pfeil zu $\vec{a}$.
Für die Subtraktion von $\vec{c}$ braucht man von $(\vec{a}-\vec{b})$ und von $\vec{c}$ Pfeile mit demselben Anfangspunkt.

An den Anfangspunkt von $\vec{a}$ hängt man einen Pfeil der Summe $\vec{b}+\vec{c}$ und verbindet die Spitzen.
Der Ergebnispfeil zeigt zu Spitze von $\vec{a}$.

Für die $\vec{a}-\vec{c}$ braucht man je einen Pfeil von $\vec{a}$ und von $\vec{b}$. Dann verbindet man die Spitzen. Pfeilrichtung nach $\vec{a}$. An den Anfangspunkt von $\vec{a}-\vec{c}$ hängt man noch einen Pfeil von $\vec{b}$ und verbindet dann die Spitzen …

1.6 Vielfache von Pfeilklassenvektoren

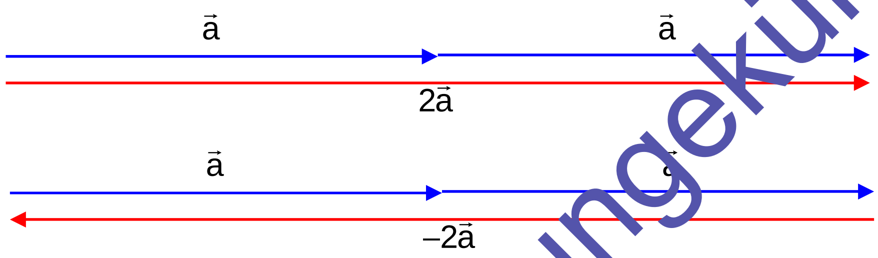
Beim Rechnen mit Zahlen kennt jeder die Möglichkeit, die Addition mehrerer gleicher Zahlen dadurch abzukürzen, dass man Vielfache bildet: $7+7+7+7+7+7+7+7 = 8\cdot 7$

Eine Summe aus 8 gleichen Zahlen ist das 8-fache dieser Zahl.

Dasselbe hat man für Vektoren eingeführt: $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a} = 8\cdot\vec{a}$ oder kurz $8\vec{a}$.

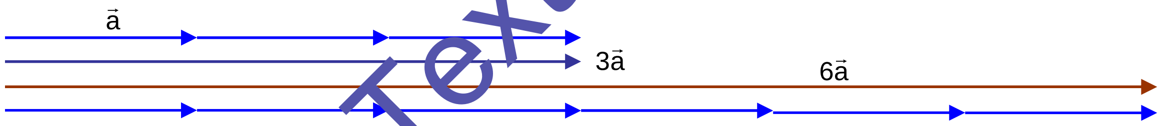
Ein gravierender Unterschied besteht zwischen diesen beiden Methoden: Vielfache von Zahlen sind ein Produkt zwischen Zahlen, während Vielfache von Vektoren ein Produkt aus einer Zahl und einem Vektor ist. Es geht hier also nicht um ein Produkt oder eine Multiplikation von Vektoren miteinander.

Hier einige Darstellungen von Vielfachen von Pfeilklassenvektoren:



Das Minuszeichen hat zusätzlich die Richtung des Pfeils geändert.

Als nächstes wird aus $\vec{a}$ der Vektor $3\vec{a}$ und dann $6\vec{a}$ erzeugt.



Günstig ist, dass dabei die bekannten Rechenregeln gelten. Das alles ist erlaubt:

$$2\cdot(3\vec{a}) = (2\cdot 3)\cdot\vec{a} = 6\vec{a}$$

$$3\vec{a}+5\vec{a} = (3+5)\vec{a} = 8\vec{a}$$

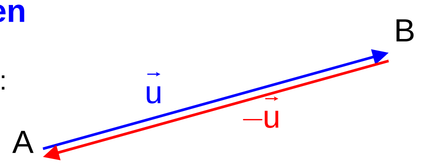
$$5(\vec{a}+\vec{b}) = 5\vec{a}+5\vec{b}$$

$$-3\cdot(4\vec{a}+6\vec{b}) = -12\vec{a}-18\vec{b}$$

$$(4\vec{a}-2\vec{b})-(3\vec{a}+5\vec{b}) = 4\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-5\vec{b} = 1\vec{a}-7\vec{b} = \vec{a}-7\vec{b}$$

Demo-Text - ungekürzt

1.7 Es gibt einen Nullvektor und inverse Vektoren



Zu jedem Vektor gibt es einen Gegenvektor (= inversen Vektor):

Gehört $\overrightarrow{AB}$ zum Vektor $\vec{u}$, dann gehört der Pfeil $\overrightarrow{BA}$ zum Vektor $-\vec{u}$, den man den Gegenvektor nennt. Die Summe beider Vektoren ist der **Nullvektor:**

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{o}$ oder so geschrieben $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{o}$.

Geometrisch gesehen hat der Nullvektor die Länge 0, und weil er eine Richtung benötigt, gibt man ihm per Definition „jede Richtung“.

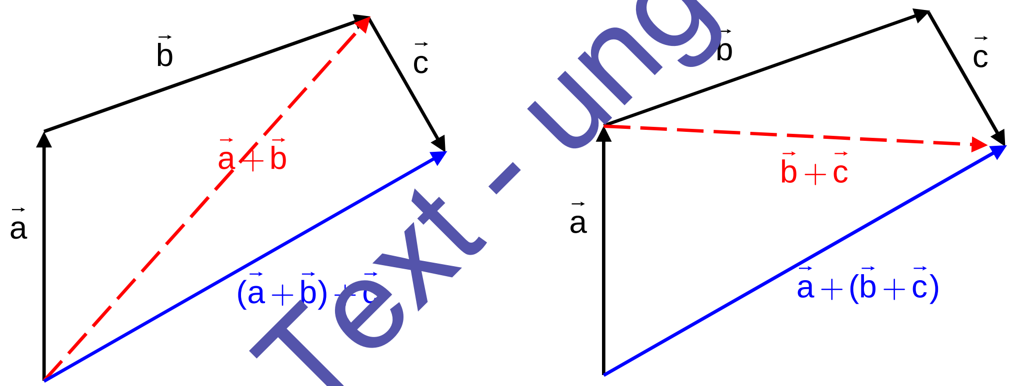
1.8 Addition von mehr als zwei Vektoren: Das Assoziativgesetz

Wir sollen $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ konstruieren. Da die Definition der Pfeilklassenaddition nur sagt, wie man *zwei* Vektoren zu addieren hat, müssen wir die Addition von drei Vektoren durch Klammersetzung auf die Addition von zwei Vektoren reduzieren. Dies geht bekanntlich auf 2 Arten:

Diese Vektoren sind für die Konstruktion gegeben:

1. Berechnung: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ 2. Berechnung: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Die Zwischensumme der Klammer ist rot eingezeichnet.



Man erkennt, dass man auch bei anderer Klammerung zum selben Endvektor kommt.

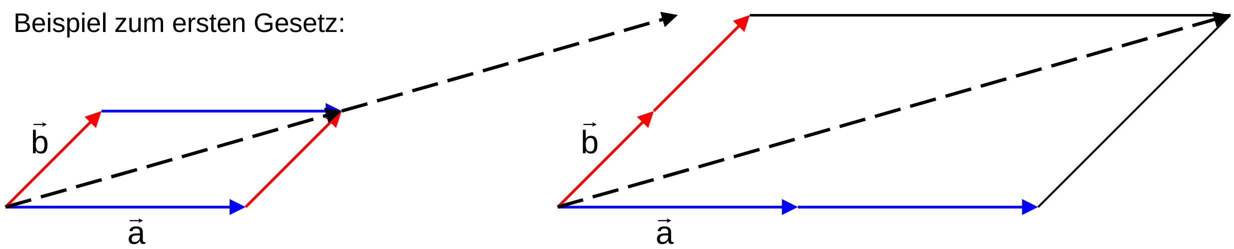
Ergebnis: Für die Addition der Pfeilklassen-Vektoren gilt das **Assoziativgesetz**:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

<u>Folgerung</u>: Weil es egal ist, wie man die Klammern setzt, darf man sie weglassen.
Dies lässt sich auf beliebig viele Vektoren ausdehnen.

1.9 Distributivgesetze: $r\cdot(\vec{a}+\vec{b})=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}$ und $(r+s)\cdot\vec{u}=r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{u}$

Beispiel zum ersten Gesetz:



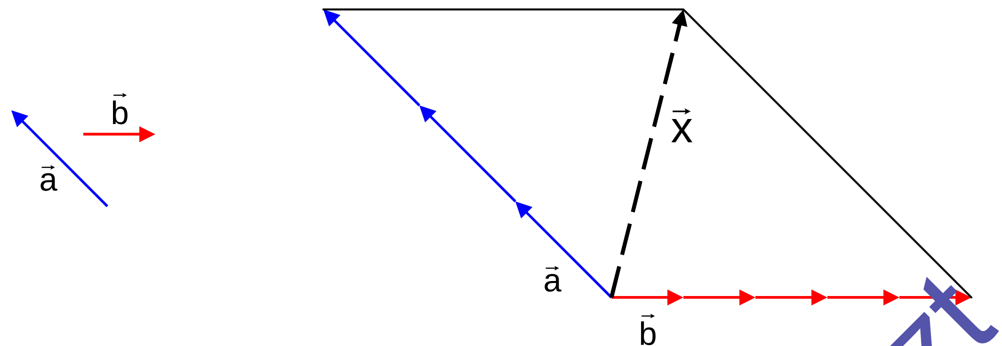
Links wird zuerst $\vec{a}+\vec{b}$ erzeugt und dann wird verdoppelt zu $2(\vec{a}+\vec{b})$

Rechts werden zuerst $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verdoppelt und dann zu $2\vec{a}+2\vec{b}$ addiert. Gleiches Ergebnis !

Demo-Text - ungekürzt

1.10 Linearkombinationen von Vektoren

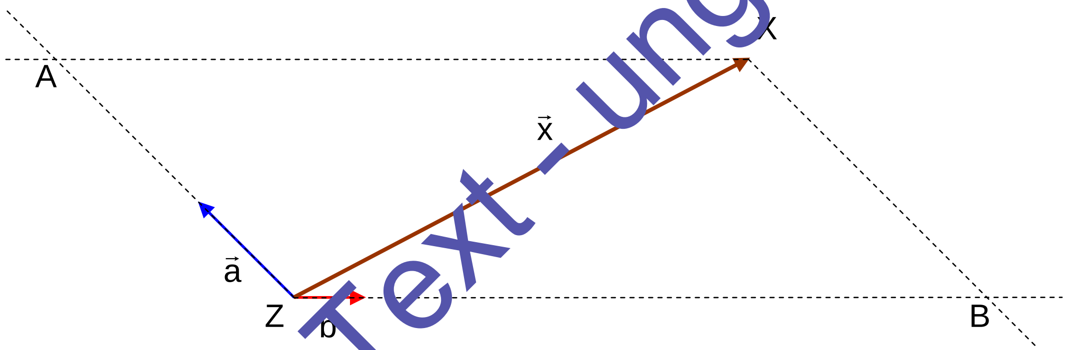
Eine Summe von Vielfachen nennt man eine Linearkombination: $\vec{x} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$



Oft muss man **die umgekehrte Aufgabe** lösen:

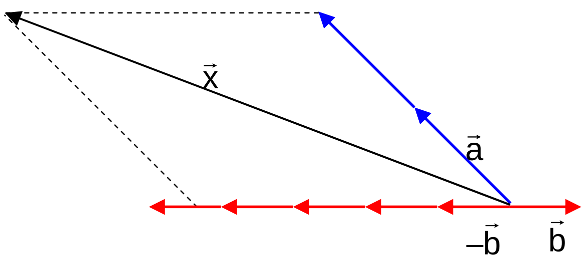
Gegeben sind dann drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$, und man sucht die Koeffizienten r und s zur Linearkombination $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b}$.

Konstruktive Lösung:



Man wählt dazu drei Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$ mit demselben Anfangspunkt Z. Dann denkt man sich den Pfeil $\overrightarrow{ZX}$ als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten man dadurch erhält, dass man Parallelen zu den Pfeilen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch Z und X zeichnet.

Ja und dann wird „abgemessen". Die Länge der Strecke ZA dividiert durch die Länge des Pfeils von $\vec{a}$ ergibt r, und die Länge von ZB dividiert durch die Länge des Pfeils von $\vec{b}$ ergibt s.
Dann hat man näherungsweise $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}$ ermittelt. Aber wie gesagt nur näherungsweise !



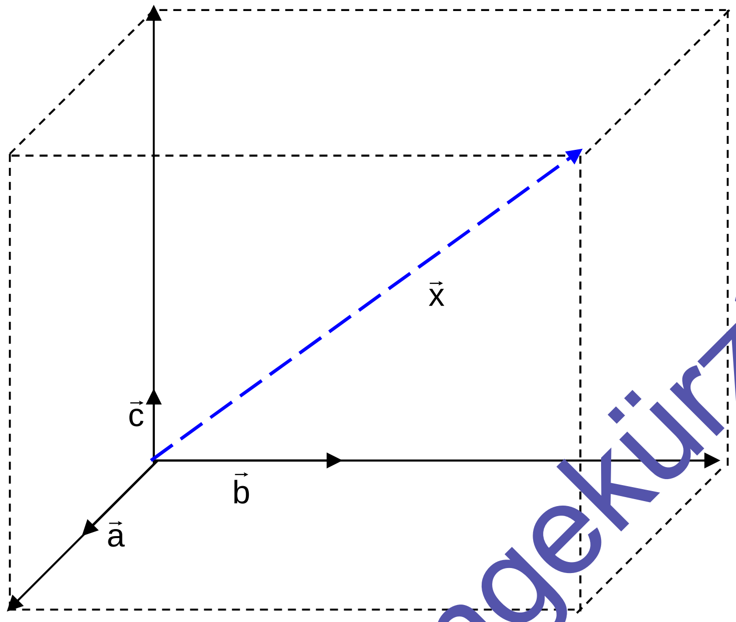
Nebenstehende Konstruktion zeigt, dass man eventuell statt $\vec{b}$ Pfeile von $-\vec{b}$ verwenden muss, um zu einem Parallelogramm zu kommen.

Hier lautet das Ergebnis:
$\vec{x} = 2\vec{a} + 4,5\left(-\vec{b}\right) = 2\vec{a} - 4,5\vec{b}$

Demo-Text - ungekürzt

Es gibt auch Linearkombinationen, die im Raum gebildet werden, aber dann natürlich in der Zeichenebene als Schrägbild

Hier ist dargestellt: $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$



Diese Figur hat die Gestalt eines Quaders, weil der Eindruck vermittelt wird, als ob die Pfeile der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ rechte Winkel bilden. Ist dies nicht der Fall, entsteht ein Körper, dessen Oberfläche aus 6 Parallelogrammen besteht. Man nennt ihn **Spat** oder Parallelflach.

1.11 Lineare Abhängigkeit von Pfeilklassenvektoren: Kollineare und komplanare Vektoren

Für geometrische Anwendungen ist es ungeheuer wichtig, dass man herausfinden kann, ob zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, oder ob einer eine Linearkombination von zwei anderen ist.

Dazu merke man sich zuerst einmal **drei Definitionen:**

Def 1 Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nennt man **kollinear**, wenn gilt: $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

Def 2 Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ nennt man **komplanar**, wenn gilt: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Def 3 Vektoren nennt man **linear abhängig**, wenn man den Nullvektor als **nicht-triviale Linearkombination** durch sie darstellen kann.

Das heißt, wenn eine Gleichung der Form $\vec{o} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n$ möglich ist, bei der nicht alle Koeffizienten 0 sind (das heißt „nicht-trivial").

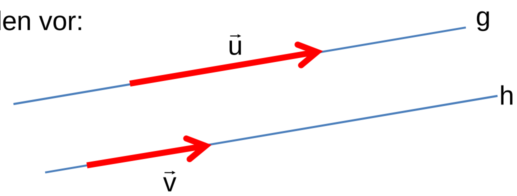
Ist dies nicht möglich, d.h. gilt nur $\vec{o} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n$, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear unabhängig**.

Dazu Beispiele, welche die Bedeutung dieser Begriffe erklären.

Demo-Text - ungekürzt

Kollineare Vektoren kommen bei parallelen Geraden vor:

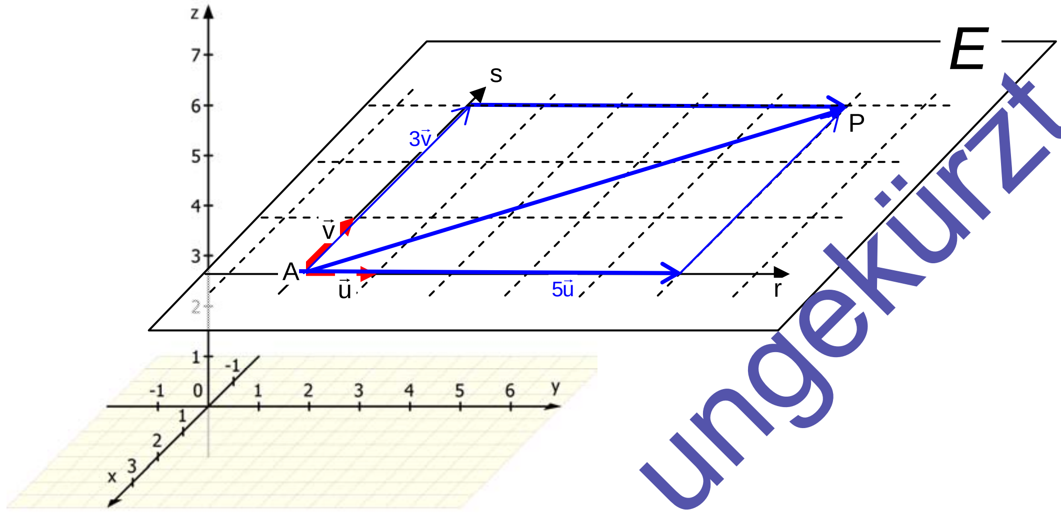
Die Richtung einer Geraden kann man durch einen so genannten Richtungsvektor festlegen.



Sind zwei Geraden parallel, dann müssen sie Richtungsvektoren haben, deren Pfeile parallel sind. Das ist z. B. dann der Fall, wenn $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}$ ist.

Man sieht, dass die Richtungsvektoren paralleler Geraden kollinear sein müssen

Komplanare Vektoren benötigt man zum Beispiel dann, wenn es um Ebenen geht.

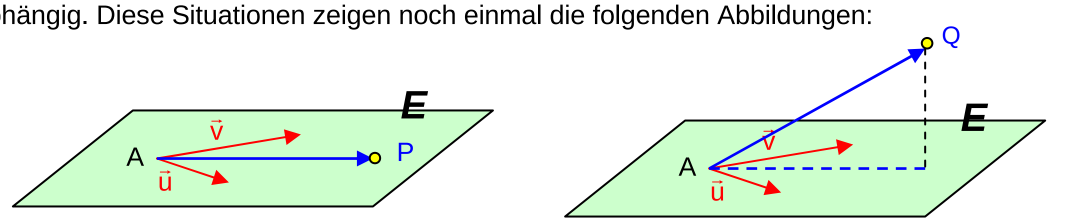


Demo-Text - ungekürzt

Diese Abbildung stellt eine irgendwie im Raum liegende Ebene dar. Um darin Punkte festlegen zu können, verwendet man zwei Koordinatensysteme. Im Raum haben die Punkt drei Koordinaten: $P(x\,|\,y\,|\,z)$, innerhalb der Ebene kommt man mit zwei Koordinaten aus, die man zur Unterscheidung von den drei Raumkoordinaten besser Parameter nennen sollte, und zwar r und s.
Dieses wird von zwei sogenannten Basisvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, die nicht rechtwinklig zueinander sein müssen und beliebige Länge haben können. Man rechnet innerhalb der Ebene von einem sogenannten **Aufpunkt A** aus. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen verschiedene Richtungen haben, dürfen also nicht kollinear sein.

Beispielsweise gilt dann für den Ebenenpunkt P, dass der Vektor $\overrightarrow{AP}$ eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sein muss, etwa $\overrightarrow{AP} = 5 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$. P hat also innerhalb dieser Ebene die Parameter 5 und 3.
Weil P in E liegt, kann man $\overrightarrow{AP}$ als Linearkombination durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen, also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar (wozu man auch linear abhängig sagen kann).

Liegt nun ein Punkt Q nicht in der Ebene E, dann kann man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ auch nicht als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen. Dann sind die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ nicht komplanar, also linear unabhängig. Diese Situationen zeigen noch einmal die folgenden Abbildungen:



P in E: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar. Q nicht in E: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ nicht komplanar.

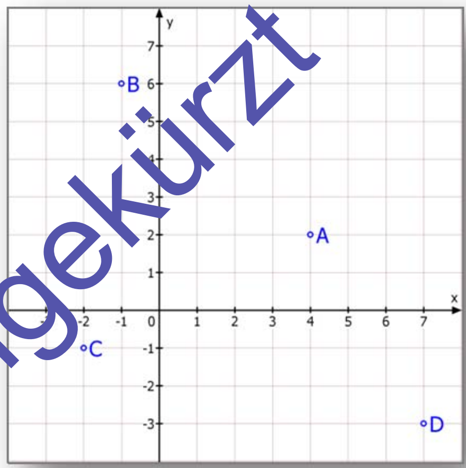
Zahlenbeispiele dazu folgen später im Text 63200 ab Seite 12.

2. Fixierung von Punkten durch Pfeilvektoren im Achsenkreuz

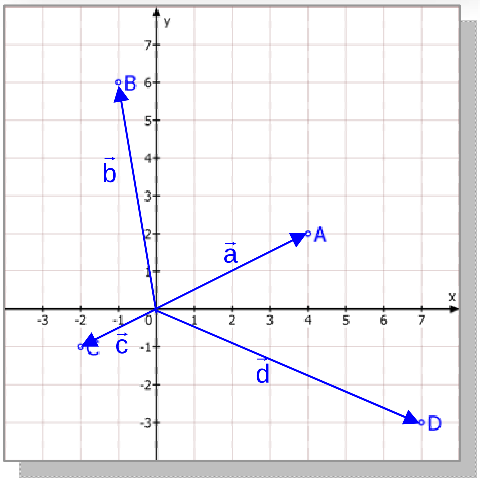
2.1 Ortsvektoren von Punkten

Vorbemerkung: Wir wissen jetzt, dass man mit Vektoren rechnen kann.
Aber mit Punkten kann man **nicht** rechnen.
Wenn man aber Punkte berechnen will, etwa Eckpunkte eines Vielecks oder Schnittpunkte von Geraden, braucht man eine Möglichkeit, Punkte dennoch in die Rechnungen einzubeziehen.

Die Lage von Punkten kann man durch Koordinaten im Achsenkreuz angeben. Zweidimensional wird jeder Punkt durch zwei Koordinaten festgelegt, im räumlichen Achsenkreuz benötigt man dazu drei Koordinaten. Diese Zahlen beziehen sich auf die Lage des Ursprungs und der Achsen.



Nebenstehende Abbildung zeigt die Lage dieser Punkte:
$A(4\,|\,2)$, $B(-1\,|\,6)$, $C(-2\,|\,-1)$ und $D(7\,|\,-3)$.
Zusätzlich hat man im Achsenkreuz immer noch den Ursprung.
Daher kann man zu jedem Punkt einen Pfeil bilden, der vom Ursprung aus zu ihm zeigt.



Die nächste Abbildung zeigt diese Pfeile, die man **Ortsvektoren** nennt, weil sie vom Ursprung zum Ort eines Punktes führen.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes $A(4\,|\,2)$.

$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes $B(-1\,|\,6)$.

$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes $C(-2\,|\,-1)$.

$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes $D(7\,|\,-3)$.

Die Koordinaten eines Punktes bzw. seines Ortsvektors sind gleich, denn sie geben beide an, wie man vom Ursprung aus den Punkt erreicht.

Zur Unterscheidung schreibt man Punktkoordinaten als Zeilenpaar (bzw. im Raum als Tripel) und Vektorkoordinaten als Spaltenpaar (bzw. als Spaltentripel im Raum).

ACHTUNG: Ein Ortsvektor ist KEIN VEKTOR sondern nur ein einzelner Pfeil.
Er hat diesen irreführenden Namen, weil man mit ihm genauso rechnen kann wie mit Vektoren, die ja aus unendlich vielen Pfeilen bestehen.
Man hat diesen historischen Begriff leider beibehalten.

Demo-Text - ungekürzt

Entsprechend erzeugt man mit allen Vektoren eines dreidimensionalen Vektorraums den dreidimensionalen affinen Punktraum. Im Raum benötigt man drei Basisvektoren, die man meistens mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bezeichnet:

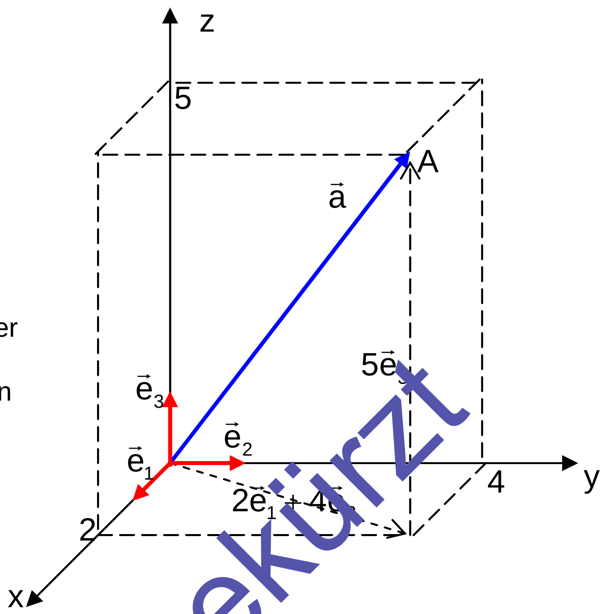
Der Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ des Punktes A ist hier die Linearkombination

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Daher erhält A diese Koordinaten: $A(2|4|5)$.

In einer Zeichnung kann man den Ortsvektor entweder als Raumdiagonale des Koordinatenquaders (Spats) erzeugen, oder direkt so wie es die Linearkombination angibt, und dies ist auch eingezeichnet:

In der Grundfläche der Pfeil $2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$.



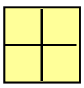
Demo-Text - ungekürzt

Vereinbarung für Schrägbildzeichnungen:

Die Länge der Basisvektoren $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ sei 1, die des schräg verkürzt dargestellten Pfeils von $\vec{e}_1$ sei $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$.

Dies hat folgenden Grund:

Im karierten Heft ist dies die Diagonale in einem Kästchen!



Ein Kästchen hat die Kantenlänge $\frac{1}{2}$cm. Dann gilt für die Länge d der Diagonalen: $d^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Hinweis:

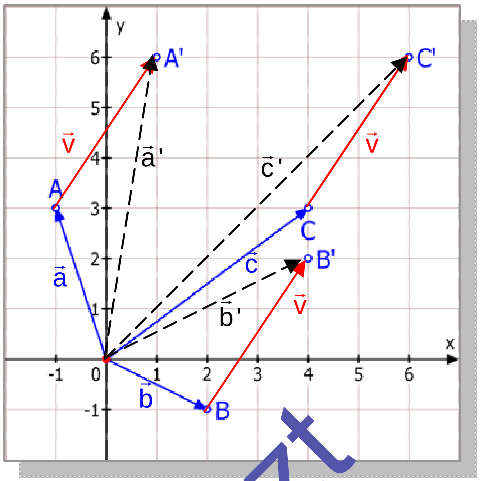
Ab hier kommen eigentlich erst Vektoren und Punkte zusammen. Man nennt Diese Kombination dann den affinen Raum.

Will man es wissenschaftlich exakt machen, muss man einige Gesetze dazu aufschreiben.

Für die Schule reicht es, wenn man weiß, dass ein affiner Raum aus einer Punktmenge und einem Vektorraum besteht, und zwar so, dass man beides durch Regeln wie $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ u. a. miteinander verbindet.

2.2 Punktberechnungen mit Ortsvektoren

Beispiel 1: Verschiebung von Punkten.



Die Punkte $A(-1|3)$, $B(2|-1)$. $C(4|3)$

sollen durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschoben werden.

Berechne die Koordinaten der Bildpunkte.

Die Abbildung zeigt die Konstruktion:

An jeden der drei Punkte wurde ein (roter) Pfeil des Verschiebungspfeils „angehängt“.

Zusätzlich sind die drei Ortsvektoren der Punkte A, B und C eingetragen.
Auf diese Weise entsteht an drei Stellen eine Vektoraddition, mit der man die Koordinaten der Ortsvektorem der Bildpunkte berechnet:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A'(1|6)$$

$$\vec{b}\,' = \vec{b} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B'(4|2)$$

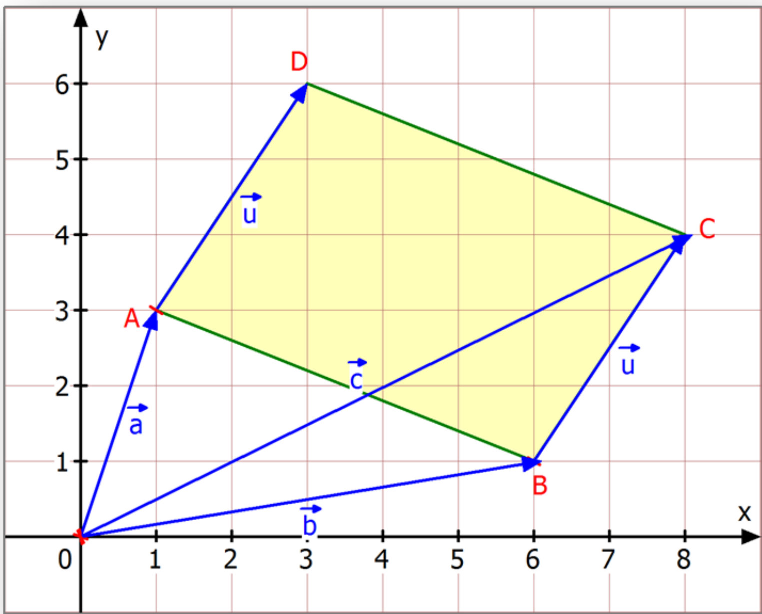
$$\vec{c}\,' = \vec{c} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C'(6|6)$$

Methode: Zum Ortsvektor des Ausgangspunktes wird der Verschiebungsvektor addiert. Das ergibt den Ortsvektor des Bildpunktes.

Demo-Text - ungekürzt

Beispiel 2

Gegeben sind die Punkte $A(1|3), B(6|1)$ und $D(3|6)$. Berechne den Punkt C so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.



Wir lesen ab: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

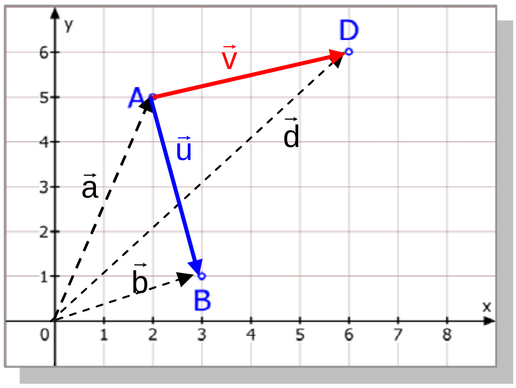
Dann gilt für den Ortsvektor $\vec{c}$ von C:

$$\vec{c} = \vec{b} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Also hat C dieselben Koordinaten:

$C(8|4)$.

2.3 Vektorberechnung aus Punkten



Musterbeispiel:

Gegeben sind drei Punkte:
$A(2|5)$, $B(3|1)$ und $D(6|6)$.
Gesucht sind die Koordinaten der Verbindungsvektoren
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ **und** $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ **.**

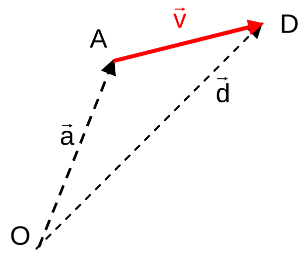
Aus der Abbildung kann man ablesen:

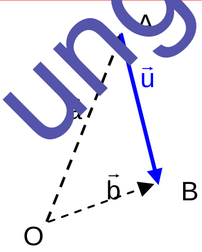
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, denn der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ geht um 1 in x-Richtung, und um 4 nach unten.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn der Pfeil AD geht um 4 in y-Richtung und um 1 in y-Richtung.

Wie kann man diese Koordinaten aus den Punktkoordinaten berechnen?

Der oberen Abbildung entnehme ich zwei Vektorkonstruktionen:





Hier sollte man erkennen:
$\vec{a} + \vec{v} = \vec{d}$, also: $\boxed{\vec{v} = \vec{d} - \vec{a}}$
Merke: $\boxed{\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a}}$

Hier sollte man erkennen:
$\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$, also: $\boxed{\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}}$
und: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

Also berechnet man den Vektor so: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

und entsprechend: $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Regel lautet: Für $\overrightarrow{AB}$ rechne
„Ortsvektor des Endpunktes B minus Ortsvektor des Anfangspunktes A“.

Aufgabe 6: Gegeben sind die vier Punkte: $A(-4|2|6)$, $B(2|-3|0)$, $C(1|5|-5)$, $D(6|2|2)$. Berechne die Vektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$.

Aufgabe 7:

a) Zeichne die Koordinatenquader für die Punkte $A(5|6|4)$ und $B(3|3|7)$.
Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

b) Zeichne die Koordinatenquader zu $A(7|3|10)$, $B(4|7|5)$.
Trage die Gerade g = (AB) ein. Projiziere ferner die Gerade g senkrecht auf die x_2x_3-Ebene und auf die x_1x_2-Ebene. Berechne den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Demo-Text - ungekürzt

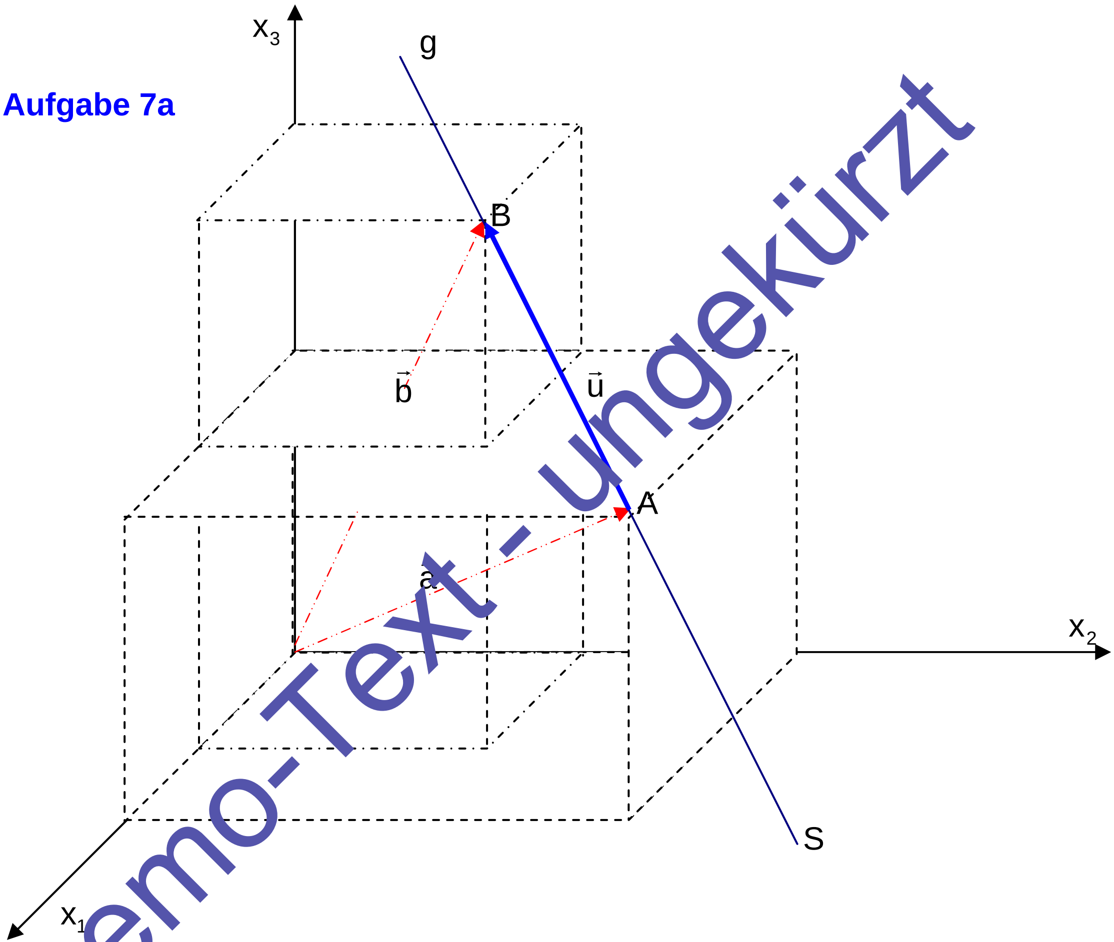
Lösung Aufgabe 6

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Es ist $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$.

Lösung Aufgabe 7a



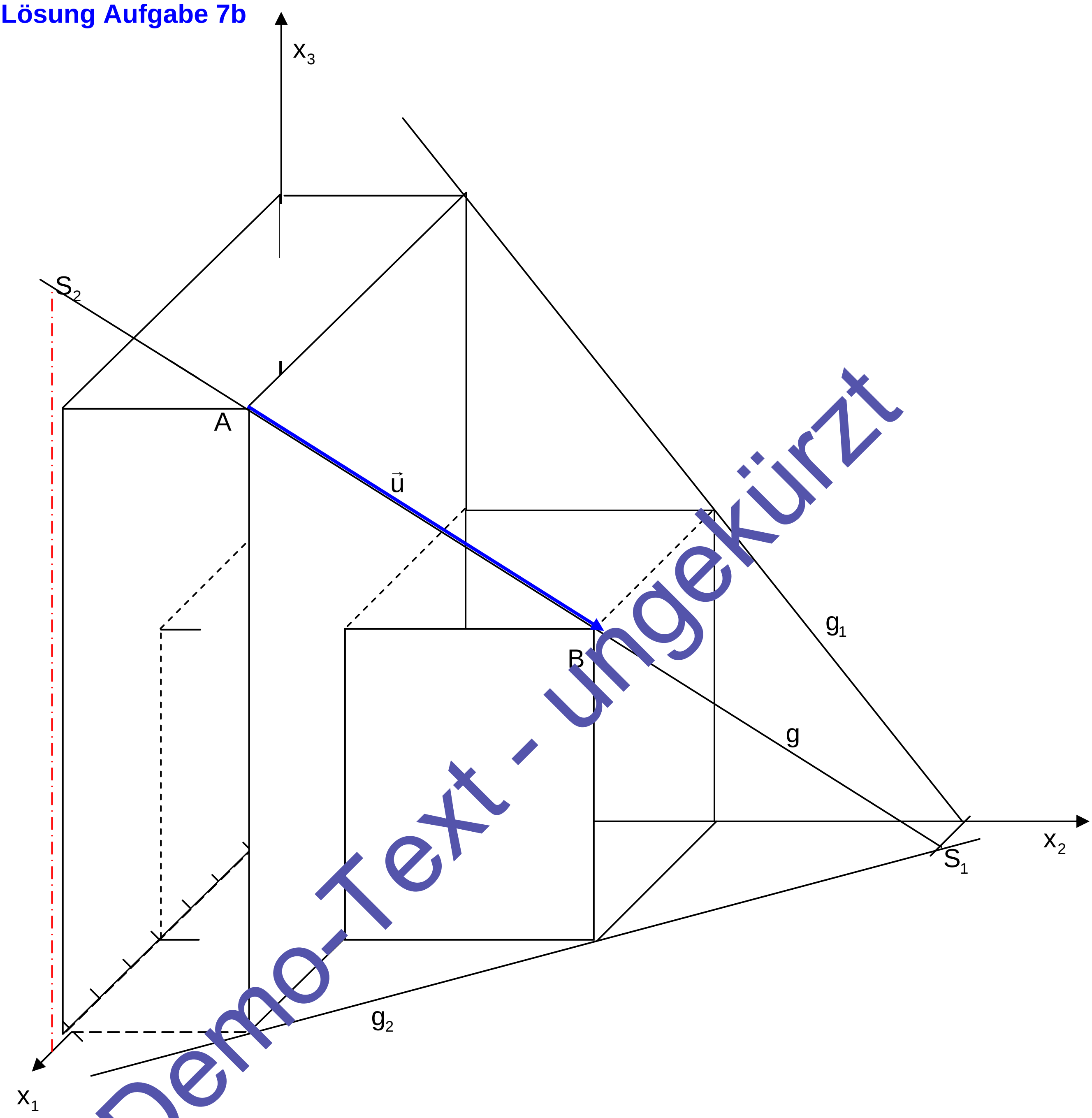
Demo-Text - ungekürzt

Das Bild zeigt die Koordinatenquader für die Punkte $A(5|6|4)$ und $B(3|3|7)$.

Mit dünnen Strichpunkt-Linien sind deren Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ eingezeichnet.

Daraus wird der Richtungsvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ gebildet.

Lösung Aufgabe 7b



Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3 Anwendung auf Parallelogramme

1. Grundaufgabe:

Überprüfe, ob vier Punkte ein Parallelogramm bilden.

Gegeben: $A(2|5|-2)$, $B(1|3|5)$, $C(5|4|8)$ und $D(6|6|1)$

Grundidee:

Wenn bei einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, dann handelt es sich um ein Parallelogramm.

Lösungsmethode:

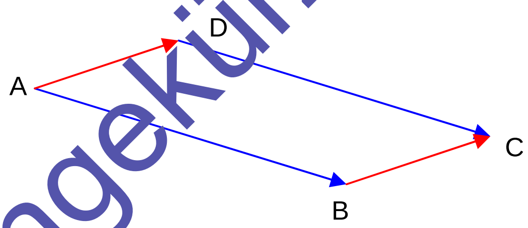
Also berechnet man

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

Weil $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist, liegt ein Parallelogramm vor!



Es ist dann nicht mehr notwendig, die beiden anderen Pfeile zu untersuchen.

Sie gehören natürlich auch zu einem Vektor.

Man kann zur Lösung dieser Aufgabe auch die beiden anderen Pfeile berechnen:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: Weil $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ liegt ein Parallelogramm vor.

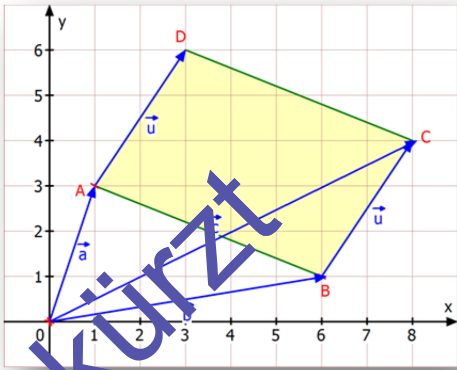
Demo-Text - ungekürzt

2. Grundaufgabe: Einen fehlenden Parallelogrammpunkt berechnen

Gegeben sind drei Punkte eines Parallelogramms ABCD:
$A(1|3)$, $B(6|1)$ und $D(3|6)$. Berechne den fehlenden Punkt C.

Achtung: Wenn man einen Punkt berechnen soll, dann berechnet man dessen Ortsvektor.

1. Methode:



Wir berechnen die Koordinaten des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dann erhält man den Ortsvektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ durch die

Vektorsumme: $\vec{c} = \vec{b} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C(8|4)$

2. Methode (viel besser!)

Die <u>Parallelogrammbedingung</u> lautet für

das abgebildete Parallelogramm: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$.

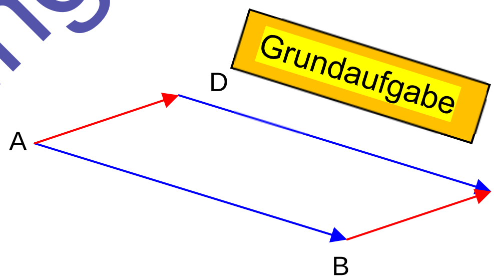
Umschreiben in: $\boxed{\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}}$

Umstellen nach dem gesuchten Ortsvektor:

Wenn also C gesucht ist, bildet man: $\boxed{\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{d}}$.

Hier die Rechnung zum obigen Zahlenbeispiel:

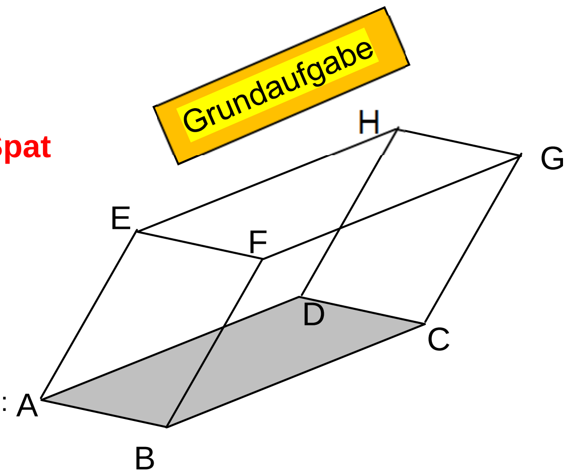
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C(8|4)$$



Ergebnis: Der vierte Parallelogrammpunkt ist $C(8|4)$.

3. Aufgabenstellung: Berechnungen an einem Spat

Ein Körper, dessen Oberfläche aus 6 Parallelogrammen besteht, heißt **Spat**. Gegenüberliegende Parallelogramme sind kongruent.



Vier der acht Eckpunkte sind durch Raumkoordinaten gegeben:
$A(3|2|-3)$, $B(-1|5|2)$, $C(1|8|5)$ und $G(2|8|1)$

a) Wie viele Pfeile des Vektors $\overrightarrow{AB}$ findet man in der Abbildung? Berechne seine Koordinaten.
Wie viele Pfeile des Vektors $\overrightarrow{BC}$ findet man in der Abbildung? Berechne seine Koordinaten.
Wie viele Pfeile des Vektors $\overrightarrow{DH}$ findet man in der Abbildung? Berechne seine Koordinaten.

b) Berechne der Reihe nach die Koordinaten der Punkte D, H, E und F.

c) Jeder Spat enthält vier Raumdiagonalen: AG, BH, CE und DF.
Berechne die zugehörenden Koordinaten der zugehörenden Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CE}$ und $\overrightarrow{DF}$.

Demo-Text - ungekürzt

Lösung:

a) Ein Spat hat 12 Kanten, von denen jeweils 4 parallel und gleich lang sind. Es gibt also genau drei verschiedene Kanten.

Also kann man drei verschiedene Vektoren auf die Kanten „legen“, sieht man von den Gegenvektoren ab, welche ja nur die entgegengesetzte Richtung haben:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix},\quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

Von jedem dieser Vektoren kann man vier Pfeile in die Abbildung eintragen:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG},\quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} \text{ und } \vec{w} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$$

b) **Berechnung der fehlenden 4 Punkte.**

Punkt D: $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = \vec{a} + \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ Oder über C mittels $-\vec{u} = \overrightarrow{CD}$:

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + (-\vec{u}) = \vec{c} - \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} \text{ d.h. } D(5\,|\,5\,|\,0)$$

Punkt E: $\vec{e} = \vec{a} + \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow E(4\,|\,2\,|\,-7)$

Punkt F: $\vec{f} = \vec{b} + \vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(0\,|\,5\,|\,-2)$ Oder über E:

$$\vec{f} = \vec{e} + \vec{u} = \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$$

Punkt H: $\vec{h} = \vec{e} + \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow H(6\,|\,5\,|\,-4)$ Oder:

$$\vec{h} = \vec{g} + (-\vec{u}) = \begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}$$ Oder auch:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} \Leftrightarrow \vec{h} = \vec{a} + \vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}$$

c) Berechnung der Vektoren zu den Raumdiagonalen:

$$\overrightarrow{AG} = \vec{g} - \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\6\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{BH} = \vec{h} - \vec{b} = \begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\-6\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{EC} = \vec{c} - \vec{e} = \begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\12\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\-12\end{pmatrix},$$

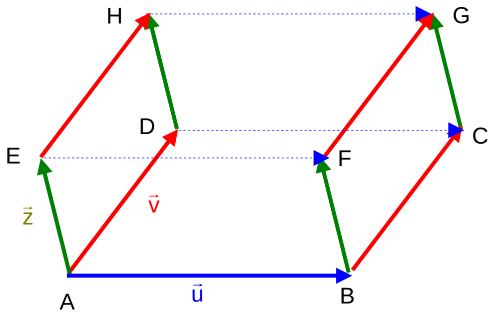
$$\overrightarrow{DF} = \vec{f} - \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{FD} = \vec{d} - \vec{f} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$$

Demo-Text - ungekürzt

Kleine Sammlung von weiteren Übungsaufgaben

Lösungen am Textende

Aufgabe 8:



Von einem **Spat** sind der Eckpunkt $A(3\,|\,2\,|\,-3)$

und diese Vektoren gegeben: $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{z}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Berechne die Koordinaten restlichen Eckpunkte

Aufgabe 9 (Viereckstyp bestimmen)

Grundaufgabe

a) Untersuche, welche Art Viereck durch die folgenden Eckpunkte definiert wird:
$A(2\,|\,-1\,|\,-3)$, $B(0\,|\,0\,|\,-2)$, $C(-1\,|\,3\,|\,3)$ und $D(3\,|\,1\,|\,1)$.

b) Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,-1)$; $B(6\,|\,-3)$; $C(5\,|\,3)$; $D(1\,|\,4)$.

Zeichne das Viereck in ein Achsenkreuz und berechne die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA}$ und begründe damit die Form des Vierecks.

Berechne die Seitenlängen des Vierecks und die Längen der beiden Diagonalen.

c) Gegeben sind die Punkte: $A(1\,|\,-5\,|\,3)$; $B(3\,|\,-3\,|\,2)$; $C(2\,|\,0\,|\,7)$; $D(0\,|\,-2\,|\,8)$.

Berechne die Seitenvektoren des Vierecks, also $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ und entscheide dann, um was für eine Art Viereck es sich handelt.

Berechne die Diagonalenvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

Aufgabe 10

Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,3\,|\,-5)$, $B(7\,|\,4\,|\,1)$ und $C(5\,|\,1\,|\,3)$.

Bestimme D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.
Achtet man nicht auf die Reihenfolge der Punkte, dann kann man drei verschiedene Parallelogramme erzeugen.

Aufgabe 11 (Ein seltsames Fünfeck)

Ein Fünfeck ABCDE ist durch folgende Angaben festgelegt:

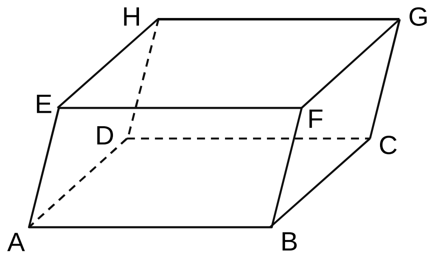
$$A(3\,|\,1\,|\,0),\; B(4\,|\,-1\,|\,3),\; \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\; \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\; E(4\,|\,5\,|\,5).$$

Berechne die Eckpunkte C und D, sowie die fehlenden Verbindungsvektoren und vier Diagonalenvektoren. Gibt es parallele Linien?
Zeige, dass das Fünfeck drei ganz spezielle Teilvierecke enthält.

Demo-Text - ungekürzt

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte $A(3|1|4)$, $B(4|4|3)$, $C(-2|3|1)$ und $F(8|7|7)$.



a) Stelle den Spat in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

b) Bestimme die Koordinaten der fehlenden Punkte.

Aufgabe 13 (Zu den Punkten aus Aufgabe 12)

Es sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$

a) Stelle die folgenden Vektoren als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dar:
$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DG}$ und $\overrightarrow{FC}$.

b) M sei der Mittelpunkt von FG, N der Mittelpunkt von CH, S teile EH im Verhältnis 2:1.

Stelle die folgenden Vektoren als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dar:

$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{SN}$.

c) Untersuche, ob sich alle vier Raumdiagonalen in einem Punkt Z schneiden.

Aufgabe 14 (Zu den Punkten aus Aufgabe 12)

Berechne die Koordinaten der neuen Punkte.

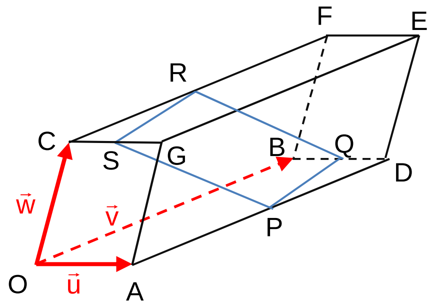
a) P teile AB im Verhältnis 3:2.

b) Q teile FH im Verhältnis 1:4.

c) R teile GD im Verhältnis 1:3.

Aufgabe 15

Die drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ spannen von O aus einen **Spat** auf.
Die Grundfläche ist OADB, die Deckfläche CDEF.
Die Punkte P, Q, R, S sind jeweils Mittelpunkte der entsprechenden Kanten.
Z sei der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks PQRS.



a) Es sei $A(4|4|1)$, $B(-2|4|1)$ und $E(1|9|5)$. Berechne die Koordinaten von C, D, F und G.

b) Zeichne ein Schrägbild des Spats in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Stelle die Vektoren $\overrightarrow{AR}$ und $\overrightarrow{OZ}$ als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dar.

d) Der Punkt H teile die Strecke GE im Verhältnis 3:1. Gib den Vektor $\overrightarrow{HZ}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ an. (Siehe Anleitung dazu im Abschnitt 4.2)

Demo-Text - ungekürzt

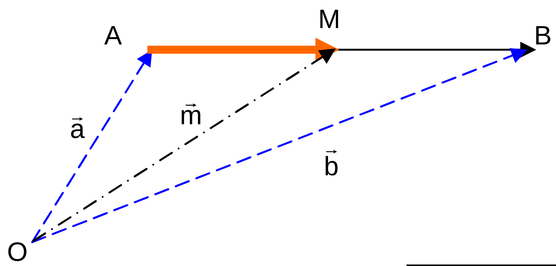
4. Teilpunkte einer Strecke.

4.1 Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke

Grundaufgabe:

Gegeben sind 2 Punkte A und B.

Gesucht ist ihr Mittelpunkt.



1. Lösung mit der Mittelpunktsformel:

Der Ortsvektor des Mittelpunkts berechnet ist der Mittelwert der Ortsvektoren: $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)}$.

Beispiele:

a) $A(-3\,|\,6),\ B(7\,|\,4)$

Rechnung mit Ortsvektoren: $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $M(2\,|\,5)$

b) $P_1(4\,|\,3\,|\,-2),\ P_2(-8\,|\,4\,|\,-6)$

Rechnung mit Ortsvektoren: $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $M(-2\,|\,3{,}5\,|\,-4)$

Hinweis: Man kann diese Mittelpunktsberechnung im Kopf machen und benötigt dazu dann keine Vektorschreibweise. Man addiert die entsprechenden Punktkoordinaten und halbiert sie anschließend. Überprüfe dies!

2. Herleitung dieser Mittelpunktsformel.

Diese Methode wird sehr oft benötigt und ist daher sehr wichtig.
Aus der Abbildung folgt, dass man den Ortsvektor $\vec{m}$ des Mittelpunkts durch eine Vektorsumme berechnen kann:

Ziel:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

Ersetzt man $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, folgt:

$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

ÜBEN !

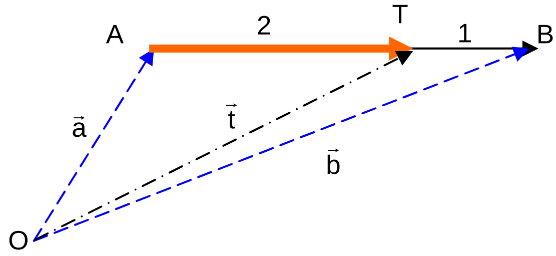
Demo-Text - ungekürzt

4.2 Berechnung von beliebigen Teilpunkten einer Strecke

Siehe dazu auch den Text 63060 und Aufgaben aus 63070.

Grundaufgabe:

Gegeben sind 2 Punkte A und B.
Gesucht ist der Punkt T, der die
Strecke Ab im Verhältnis 2 : 1 teilt.



ACHTUNG: **Wenn T die Strecke AB im Verhältnis 2 : 1 teilt, dann gibt es 3 Teile.**
AT ist dann $\frac{2}{3}$ der Gesamtstrecke und TB $\frac{1}{3}$.

Lösung:

Durch T wird die Strecke AB in 2 + 1 = 3 Teile zerlegt. Daher ist $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Damit erhält man: $\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$. Ersetzt man $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, folgt:

$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

Zahlenbeispiel: $A(-4\,|\,5\,|\,11)$, $B(2\,|\,-7\,|\,-1)$. **T soll AB im Verhältnis 2:1 teilen.**

1. Lösung: Man kann nun die Rechnung so durchführen:

$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\vec{t} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\11\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{14}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{9}{3}\\\frac{9}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$$

Also ist $T(0\,|\,-3\,|\,3)$.

2. Lösung: Oder man beginnt mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\5\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-12\\-12\end{pmatrix}$

Und rechnet dann

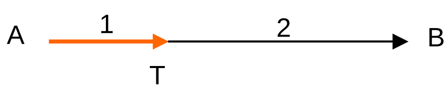
$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\5\\11\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\-12\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\5\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-8\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$$

Ich bevorzuge die 2. Lösung, weil man hier in vielen Fällen Brüche vermeidet.

Hinweis: Wenn T die Strecke im Verhältnis 1 : 2 teilen soll, dann ist $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Das ergibt dann:

$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\5\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T(-2\,|\,1\,|\,7)$$



Man achte also auf die Reihenfolge der Teile!

Demo-Text - ungekürzt

Rechentipp für solche Aufgaben: Mache es dir leicht!

Vielen Schülern fällt das Bruchrechnen schwer. Hier einige Tipps für die folgenden Aufgaben:

$\frac{2}{3}\cdot 5$ berechnet man, indem man den Zähler mit 5 multipliziert: $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2\cdot\boxed{5}}{3}=\frac{10}{3}$

In vielen Rechnungen kann man **Kürzen**, dann sieht die Rechnung so aus:

$$\frac{5}{21}\cdot 28=\frac{5\cdot\boxed{28}}{21}=\frac{140}{21}=\frac{\cancel{7}\cdot 20}{\cancel{7}\cdot 3}=\frac{20}{3}$$

Dies ist natürlich ganz schlecht gemacht und sehr typisch für viele Lösungen!

Schlecht daran ist, dass erst am Ende gekürzt worden ist, also erst nach der Multiplikation.

Diese Multiplikation erzeugt zuerst große Zahlen, die man am Ende wieder kürzen soll.

Dabei ist es doch sehr viel einfacher, wenn man zuerst kürzt, also die Zahlen klein macht und dann erst multipliziert:

$$\frac{5}{21}\cdot 28=\frac{5\cdot\boxed{28}}{21}=\frac{5\cdot 4\cdot\cancel{7}}{3\cdot\cancel{7}}=\frac{20}{3}$$

Merke also:	Wird ein Bruch mit einer Zahl multipliziert, dann soll man wenn möglich zuerst kürzen und dann erst multiplizieren!

Demo-Text - ungekürzt

Aufgabe 16 Berechne folgende Teilungspunkte:

a) $A(-3\,|\,5),\ B(5\,|\,-3)$, T teilt AB im Verhältnis 3 : 5.

b) $A(2\,|\,-9),\ B(5\,|\,2)$, T teilt AB im Verhältnis 2 : 3.

c) $C(1\,|\,3\,|\,0),\ D(9\,|\,-1\,|\,8)$ T teilt CD im Verhältnis 1 : 3

d) $P_1(-5\,|\,5\,|\,-3),\ P_2(0\,|\,10\,|\,-2)$ T teilt P_1P_2 im Verhältnis 3 : 2

e) $R(5\,|\,2\,|\,8),\ S(-7\,|\,4\,|\,2)$ T teilt RS im Verhältnis 5 : 1

f) $B(-3\,|\,\frac{1}{2}\,|\,-2),\ D(1\,|\,\frac{7}{2}\,|\,4)$ T teilt BD im Verhältnis 3 : 1

Lösungen auf der nächsten Seite.

Lösung Aufgabe 16

a)	$A(-3 \mid 5),\ B(5 \mid -3)$,	T teilt AB im Verhältnis 3 : 5, das ergibt 8 Teile, von denen auf die Strecke AT drei entfallen (und auf TB 5).
	Vorarbeit:	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$
	Daraus folgt:	$\vec{t} = \vec{a} + \frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \frac{3}{8}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T(0 \mid 2)$
b)	$A(2 \mid -9),\ B(5 \mid 2)$,	T teilt AB im Verhältnis 2 : 3, das ergibt 5 Teile.
	Vorarbeit:	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix}$
	Daraus folgt:	$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{22}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{5}+\frac{6}{5}\\-\frac{45}{5}+\frac{22}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{5}\\-\frac{23}{5}\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T\left(\frac{16}{5} \mid \frac{-23}{5}\right)$
c)	$C(1 \mid 3 \mid 0),\ D(9 \mid -1 \mid 8)$	T teilt CD im Verhältnis 1 : 3, das ergibt 4 Teile.
	Vorarbeit:	$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}9\\-1\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix}$
	Daraus folgt:	$\vec{t} = \vec{c} + \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T(3 \mid 2 \mid 2)$
d)	$P_1(-5 \mid 5 \mid 13),\ P_2(0 \mid 10 \mid -2)$	T teilt P_1P_2 im Verhältnis 3 : 2, das ergibt 5 Teile.
	Daraus folgt:	$\vec{t} = \vec{x}_1 + \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}-5\\5\\13\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}5\\5\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\\13\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\4\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T(-2 \mid 8 \mid 4)$
e)	$R(5 \mid 2 \mid 8),\ S(-7 \mid 4 \mid 2)$	T teilt RS im Verhältnis 5 : 1, das ergibt 6 Teile.
	Man rechnet:	$\vec{t} = \vec{r} + \frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix} + \frac{5}{6}\cdot\begin{pmatrix}-12\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10\\\frac{5}{3}\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\\frac{11}{3}\\3\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T\left(-5 \mid \frac{11}{3} \mid 3\right)$
f)	$B\left(-3 \mid \frac{1}{2} \mid -2\right),\ D\left(1 \mid \frac{7}{2} \mid 4\right)$	T teilt BD im Verhältnis 3 : 1, das ergibt 4 Teile.
	Man rechnet:	$\vec{t} = \vec{b} + \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\\frac{9}{4}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{11}{4}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$
	Ergebnis:	$T\left(0 \mid \frac{11}{4} \mid \frac{5}{2}\right)$

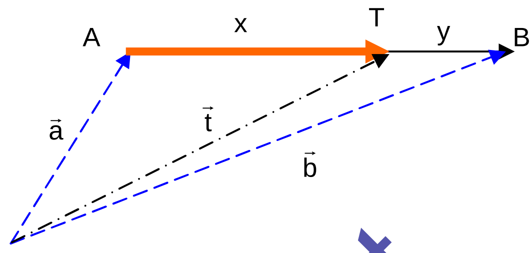
Demo-Text - ungekürzt

4.3 Die Umkehrung: In welchem Verhältnis teilt ein Punkt eine Strecke?

Musterbeispiel 1

Gegeben sind $A(4|0|1)$, $B(14|4|1)$, $T(9|2|1)$. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB?

Klar muss sein:
Wenn T im Innern der Strecke AB liegt,
dann muss $\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ sein, wobei der Faktor k zwischen 0 und 1 liegen muss.
Dasselbe gilt natürlich umgekehrt:
Wenn 0 < k < 1 ist, dann ist T ein Teilpunkt der Strecke AB.



Rechnung dazu (Lösung durch Vektorvergleich):

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wird verglichen mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier erkennt man ohne Nebenrechnungen: $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Also ist T der Mittelpunkt der Strecke AB. T teilt also die Strecke AB im Verhältnis 1 : 1.

Musterbeispiel 2 Seltsamer Teilpunkt!

Gegeben sind $A(4|0|1)$, $B(14|4|1)$, $T(34|12|1)$. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB?

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 34 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wird verglichen mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt: $\overrightarrow{AT} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Interpretation: T liegt nicht auf der Strecke AB, aber immerhin noch auf der Geraden (AB), aber außerhalb der Strecke AB. Jetzt ist umgekehrt B ein Teilpunkt von AT.

Musterbeispiel 3 Vorsicht Falle!

Gegeben sind $A(4|0|1)$, $B(14|4|1)$, $T(24|8|0)$. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB?

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ wird verglichen mit } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist $\overrightarrow{AT}$ kein Vielfaches bzw. Bruchteil mehr von $\overrightarrow{AB}$. Die ersten beiden Koordinaten von $\overrightarrow{AT}$ sind zwar das Doppelte der entsprechenden Koordinaten von $\overrightarrow{AB}$, aber für die dritten Koordinaten gilt dies nicht mehr. **Also liegt T gar nicht auf der Geraden durch AB, er ist somit auch kein Teilpunkt der Strecke AB.**

Demo-Text - ungekürzt

Musterbeispiel 4 *mit schriftlicher Nebenrechnung!*

Gegeben sind $A(5|-13|20)$, $B(29|5|-16)$, $T(25|2|-10)$.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB?

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 29 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \text{wird verglichen mit} \quad \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Wenn man wie hier nicht sofort erkennt, ob und ggf. welches Vielfache vorliegt, sollte man diese Untersuchung schriftlich machen:

Man macht den Ansatz: $\boxed{\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB}}$

d. h. ausführlich: $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

Für jede Koordinate ergibt dies eine Gleichung, insgesamt also dieses

Gleichungssystem: $\left\{ \begin{matrix} 20 = 24 \cdot k \\ 15 = 18 \cdot k \\ -30 = -36 \cdot k \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} k = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\ k = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\ k = \frac{-30}{-36} = \frac{5}{6} \end{matrix} \right\}$

Weil alle drei Gleichungen zum selben Ergebnis führen, gilt $k = \frac{5}{6}$ für die

Vektorgleichung: $\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{5}{6} \cdot \overrightarrow{AB}}$

Das heißt, dass wir von A bis T fünf Teile haben und von T bis B eine Teilstrecke.

Ergebnis: T teilt die Strecke AB im Verhältnis 5 : 1.

Aufgabe 17 Teilverhältnisse berechnen

Bestimme das Teilverhältnis für den Punkt T und die Strecke AB:

a) $A(4|0|1)$, $B(14|4|1)$, $T(9|2|1)$

b) $A(-3|-2|-1)$, $B(2|7|5)$, $T(12|25|17)$

c) $A(-4|2|-3)$, $B(20|2|15)$, $T(16|2|12)$

d) $A(4|2|-6)$, $B(16|14|6)$, $T(12|10|1)$

Für welche t_1, t_2 ist T ein Teilpunkt von AB?

e) $A(-4|-7|-3)$, $B(10|13|9)$, $T(3|t_2|t_3)$

f) $A(-4|-7|-3)$, $B(10|13|9)$, $T(t_1|23|t_3)$

g) $A(-4|-7|-3)$, $B(10|13|9)$, $T(t_1|t_2|-9)$

Lösungen auf der nächsten Seite.

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 17

Bestimme das Teilverhältnis für den Punkt T und die Strecke AB:

a) $A(4|0|1),\ B(14|4|1),\ T(9|2|1)$

Ansatz: $\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$

Aus $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ folgt, dass T die Strecke AB im Verhältnis 1:1 teilt, also deren Mittelpunkt ist.

b) $A(-3|-2|-1),\ B(2|7|5),\ T(12|25|17)$

Ansatz: $\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 3$

Aus $\overrightarrow{AT} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$ folgt, dass T nicht auf der Strecke AB liegt. Er liegt jedoch auf der Geraden (AB) und wegen $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AT}$ teilt B die Strecke AT im Verhältnis 1:2.

c) $A(-4|2|-3),\ B(20|2|15),\ T(16|2|12)$

Ansatz: $\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = \frac{5}{6}$

Aus $\overrightarrow{AT} = \frac{5}{6} \cdot \overrightarrow{AB}$ folgt, dass T die Strecke AB im Verhältnis 5:1 teilt.

d) $A(4|2|-6),\ B(16|14|6),\ T(12|10|1)$

$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k = \frac{3}{4} \\ k = \frac{3}{4} \\ k \neq \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$

T liegt nicht auf der Geraden (AB), ist also kein Teilpunkt von AB.

e) $A(-4|-7|-3),\ B(10|13|9),\ T(3|t_2|t_3)$

$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ t+7 \\ t+3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k = \frac{1}{2} \\ t = 3 \\ t = 3 \end{Bmatrix}$

Aus der ersten Koordinate folgt $k = \frac{1}{2}$, und damit erhalten wir für die 2. und 3. Koordinate übereinstimmend: t = 3.

Aus $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ folgt, dass T die Strecke AB im Verhältnis 1:1 teilt, also deren Mittelpunkt ist.

Demo-Text - ungekürzt

f) $A(-4|-7|-3),\ B(10|13|9),\ T(t_1|23|t_3)$

$$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1+4 \\ 30 \\ t_3+3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} t_1 = 17 \\ k = \frac{3}{2} \\ t_3 = 15 \end{matrix} \right\}$$

Der Punkt $T(17|23|15)$ liegt demnach außerhalb der Strecke AB auf der Geraden (AB), so dass gilt $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ d.h. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AT}$, also teilt hier B die Strecke AT im Verhältnis 2:1.

g) $A(-4|-7|-3),\ B(10|13|9),\ T(t_1|t_2|-9)$

$$\overrightarrow{AT} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1+4 \\ t_2+7 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} t_1 = -11 \\ t_2 = -17 \\ k = -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$$

Der Punkt $T(-11|-17|-9)$ liegt demnach außerhalb der Strecke AB auf der Geraden (AB), so dass gilt $\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Also ist A ein Teilpunkt der Strecke BT und zwar im Verhältnis 1:2.

Demo-Text - ungekürzt

5 Dreiecksuntersuchungen

Grundaufgabe:

Gegeben sind die Punkte A, B und C.

a) Zeige, dass sie ein Dreieck bilden.

b) Liegen sie auf einer Geraden?

Diese beiden Teilaufgaben sind im Grunde identisch!

Zahlenbeispiele:

(1) $A(4|0|1),\ B(14|4|1),\ C(24|8|0)$

Kürzeste Lösungsmethode: Man vergleicht die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

Gilt $\overrightarrow{AC} \neq k\cdot\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AC}$ ist kein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$), dann bilden A, B, C **ein Dreieck**.

Gilt $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{AB}$, dann liegen A, B und C auf einer Geraden und bilden **kein Dreieck**.

Rechnung dazu: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}24\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\8\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}14\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}$ ist **kein** Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$. **Also liegt T nicht auf der Geraden durch AB.**

Mit anderen Worten: ABC bilden ein Dreieck.

(2) $A(1|-3|2),\ B(5|5|-10),\ C(3|0|4)$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\-12\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

ist $\overrightarrow{AC} \neq k\cdot\overrightarrow{AB}$, also bilden A,B und C ein Dreieck.

(3) $A(-2|1|3),\ B(4|3|-9),\ C(16|7|-33)$

Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\3\\-9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\-12\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}16\\7\\-33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\6\\-36\end{pmatrix}$

ist $\overrightarrow{AC} = 3\cdot\overrightarrow{AB}$, also liegen A,B und C auf einer Geraden und bilden kein Dreieck.

Hinweis: Man lernt später noch eine andere, aber umständlichere Methode, die darin besteht, dass man die Gleichung der Geraden (AB) aufstellt und durch Einsetzen der Koordinaten von C (punktprobe) überprüft, ob C auf (AB) liegt.
Also bitte die hier gezeigt Kurzmethode Methode nicht vergessen!

Demo-Text - ungekürzt

Häufig gestellte Variante dieser Aufgabe:

Grundaufgabe

Für welchen Wert von t liegt C_t auf der Strecke AB

mit $A(5\,|\,3\,|\,-4)$, $B(3\,|\,-6\,|\,8)$ und $C_t(t\,|\,-24\,|\,33+t)$

Oder: Für welche Werte von t bilden ABC_t ein Dreieck?

Lösung:

Vorarbeit: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} t \\ -24 \\ 33+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-5 \\ -27 \\ 37+t \end{pmatrix}$

Bedingung dafür, dass C_t auf der Geraden (AB) liegt: $\overrightarrow{AC_t} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Vektorenvergleich: $\begin{pmatrix} t-5 \\ -27 \\ 37+t \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

Oder als Gleichungssystem geschrieben: $\left\{\begin{array}{l} t-5 = -2k \\ -27 = -9k \\ 37+t = 12k \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Aus der (2) folgt $k = 3$

Damit kann man aus (1) t berechnen:

In (1) eingesetzt: $t - 5 = -2 \cdot \boxed{3} \quad | +5$

$t = -6 + 5 = -1$

Da alle drei Gleichungen gelöst werden müssen, muss man jetzt noch die Probe in (3) machen.

Eingesetzt in (3): $\underbrace{37 + \boxed{-1}}_{36} = \underbrace{\boxed{3} \cdot 12}_{36}$

Dies ist eine wahre Aussage.

1. Ergebnis:

Also liegt der Punkt C_t für t = - 1 auf der Geraden (AB), $C_{-1}(-1\,|\,-24\,|\,32)$.

2. Ergebnis:

Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist ABC_t ein Dreieck.

Aufgabe 18

Zeige, dass $A(0\,|\,1\,|\,3)$, $B(3\,|\,0\,|\,5)$, $C(-2\,|\,4\,|\,5)$ nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 19

untersuche, ob $A(0\,|\,1\,|\,3)$, $B(3\,|\,0\,|\,5)$, $C(-2\,|\,4\,|\,5)$ ein Dreieck bilden.

Aufgabe 20 (Schwierige Rechnung!)

Für welche Werte von t bilden $A(1\,|\,-1\,|\,2)$, $B_t(t^2+1\,|\,t-4\,|\,0)$ und $C_t(t+1\,|\,3\,|\,t+5)$ ein Dreieck?

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 18

$A(0|1|3),\ B(3|0|5), C(-2|4|5):\quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}.$

Da $\overrightarrow{AC}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{AC}$ ist, liegen A, B und C nicht auf einer Geraden.

Lösung Aufgabe 19

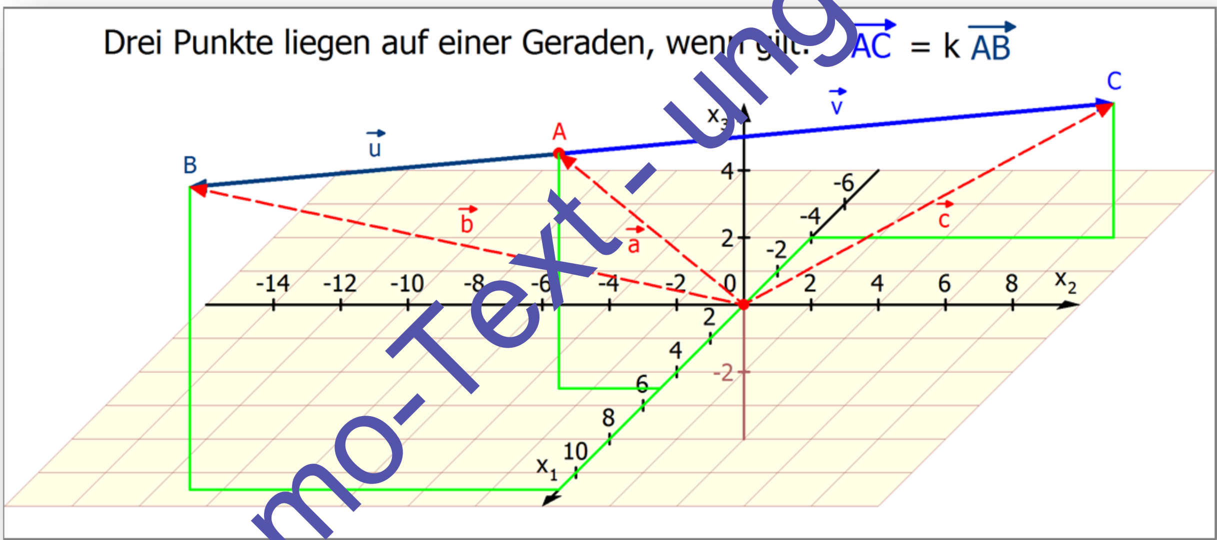
$A(5|-3|7),\ B(11|-11|9), C(-4|9|4):\quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-8\\2\end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-9\\12\\-3\end{pmatrix}.$

Wer jetzt nicht erkennt, ob diese Vektoren kollinear (Vielfache voneinander) sind, untersucht dies mit diesem ***Ansatz***: $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

Das ergibt ein Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}-9\\12\\-3\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}6\\-8\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{Bmatrix}6k=-9\\-8k=12\\2k=-3\end{Bmatrix}$

Da **jede Gleichung** auf $k=-\frac{3}{2}$ führt, lautet das Ergebnis: $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

Mit einem Programm wie MatheGrafix kann man diese Situation so darstellen:



Ergebnis: A, B und C liegen auf einer Geraden und bilden daher kein Dreieck.

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 20

$A(1|-1|2)$, $B_t(t^2+1|t-4|1)$ und $C_t(t+1|3|t+5)$: $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ t+2 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ d. h. $\begin{pmatrix} t \\ 4 \\ t+2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t-3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = k \cdot t^2 \\ 4 = k(t-3) \\ t+2 = -k \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Methode: Aus (2) und (3) berechnet man k und t und macht dann die Probe in (1):

(2): $4 = k \cdot t - 3k$

(3): $t = -k - 2$

t in (2): $4 = k \cdot (-k-2) - 3k$

$k^2 + 5k + 4 = 0$

Mitternachtsformel: $k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

Die zugehörigen t-Werte werden aus (3) berechnet:

$t = -k - 2$: Zu $k_1 = -1$ gehört $t_1 = 1 - 2 = -1$

Zu $k_2 = -4$ gehört $t_2 = 4 - 2 = 2$

Probe in (1) für $k_1 = \boxed{-1}$ und $t_1 = -1$: $-1 = \boxed{-1} \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow -1 = -1$ richtig.

Probe in (1) für $k_2 = \boxed{-4}$ und $t_2 = 2$: $2 = \boxed{-4} \cdot 2^2 \Leftrightarrow 2 = -16$ falsch.

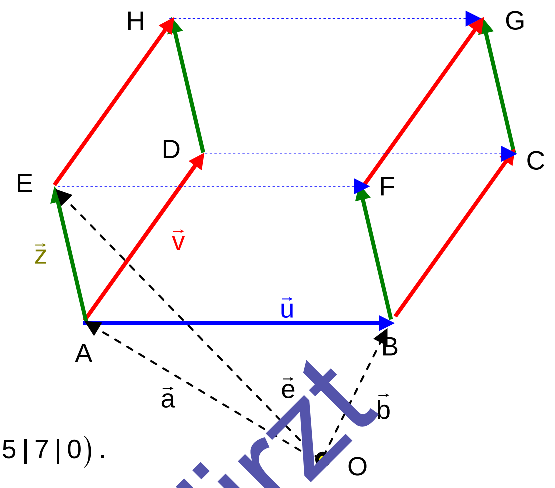
Also sind $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ nur dann kollinear, wenn t = -1 ist.

Ergebnis: Für t = -1 liegen A, B_t und C_t auf einer Geraden, für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ bilden sie ein Dreieck.

Demo-Text - ungekürzt

6 Lösungen der Aufgaben 8 bis 15

Lösung Aufgabe 8



Aus $A(3|2|-3)$ und den Vektoren

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

berechnet man die Ortsvektoren der restlichen Punkte:

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\vec{u}$ bzw. kürzer geschrieben:

$$\vec{b}=\vec{a}+\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } B(5|7|0).$$

$$\vec{e}=\vec{a}+\vec{z}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } E(-1|1|-2)$$

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } D(4|4|3)$$

Zu den Punkten C und F kommt man von O aus über B:

$$\vec{c}=\vec{b}+\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\6\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } C(6|9|6)$$

$$\vec{f}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=\vec{b}+\vec{z}=\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } F(1|6|1)$$

$$\vec{h}=\vec{d}+\vec{z}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } H(0|3|4)$$

Oder so:

$$\vec{h}=\vec{e}+\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\qquad \text{ergibt } H(0|3|4)$$

Fehlt noch G, den ich auf drei Arten berechne:

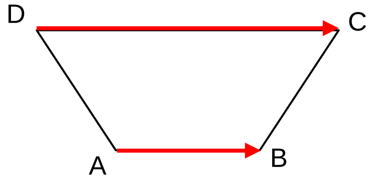
$$\left.\begin{aligned}\vec{g}&=\vec{c}+\vec{z}=\begin{pmatrix}6\\9\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\7\end{pmatrix}\\ \vec{g}&=\vec{f}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\7\end{pmatrix}\\ \vec{g}&=\vec{h}+\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\7\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad \text{ergibt } G(2|8|7)$$

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 9

a) Untersuche, welche Art Viereck durch die folgenden Eckpunkte definiert wird:

$A(2|-1|-3)$, $B(0|0|-2)$, $C(-1|3|3)$ und $D(3|1|1)$.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}.$$

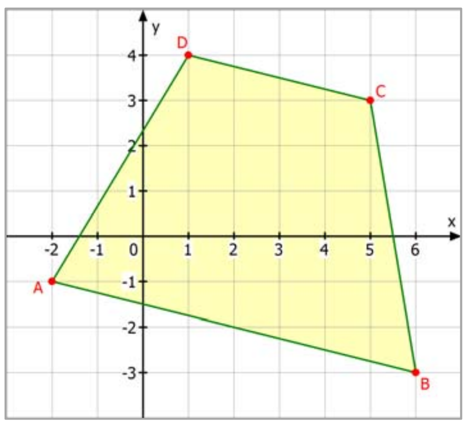
Man erkennt: $\overrightarrow{CD} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Die Seiten AB und CD sind somit parallel.

Ergebnis: Es liegt somit ein Trapez vor, bei dem die Grundseite halb so lang ist wie die gegenüberliegende Seite.

b) Gegeben sind die Punkte $A(-2|-1)$; $B(6|-3)$; $C(5|3)$; $D(1|4)$.
Zeichne das Viereck in ein Achsenkreuz und berechne die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ und begründe damit die Form des Vierecks.
Berechne die Seitenlängen des Vierecks und die Längen der beiden Diagonalen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}.$$

Weil $\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{CD}$ ist, sind die Seiten AB und CD parallel.
Also liegt ein Trapez vor. Bei diesem ist die Seite CD halb so lang wie die Seite AB.



$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \approx 8{,}25 \text{ (LE)},$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \approx 6{,}08 \text{ (LE)},$$

$$\overline{CD} = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ (LE)}$$

$$\overline{DA} = \left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83 \text{ (LE)}$$

$$\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{21+9} = \sqrt{30} \approx 5{,}45 \text{ (LE)}$$

$$\overline{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74} \approx 8{,}60 \text{ (LE)}$$

c) Gegeben sind die Punkte: $A(1|-5|3)$; $B(3|-3|2)$; $C(2|0|7)$; $D(0|-2|8)$.
Berechne die Seitenvektoren des Vierecks, also $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ und entscheide dann, um was für eine Art Viereck es sich handelt.
Berechne auch die Diagonalenvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}. \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-3\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Weil $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ liegt ein Parallelogramm vor, denn die Seiten CD und AB sind gleich lang und parallel.

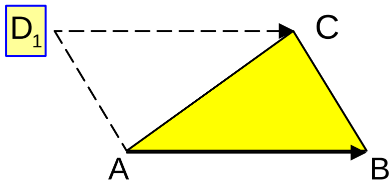
Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 10

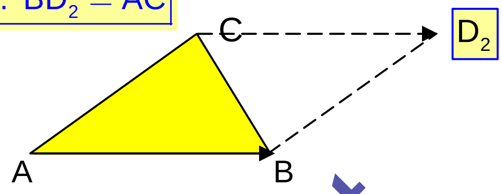
Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,3\,|\,-5)$, $B(7\,|\,4\,|\,1)$ und $C(5\,|\,1\,|\,3)$.
Bestimme D so dass ABCD ein Parallelogramm ist.

Diese Lösung ist nicht eindeutig, wie man aus folgenden Skizzen entnehmen kann:

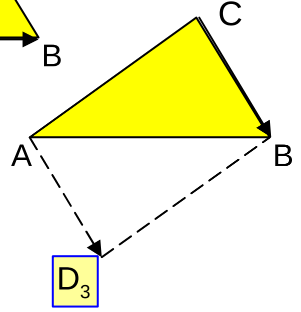
1\. Fall: $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC}$



2\. Fall: $\overrightarrow{BD_2} = \overrightarrow{AC}$



3\. Fall: $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB}$



1\. Fall: Parallelogrammbedingung: $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{d}_1 - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1(2\,|\,0\,|\,-3)$$

2\. Fall: Parallelogrammbedingung: $\overrightarrow{BD_2} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{d}_2 - \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$

$$\vec{d}_1 = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2(8\,|\,2\,|\,9)$$

3\. Fall: Parallelogrammbedingung: $\overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \vec{d}_3 - \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$

$$\vec{d}_3 = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow D_3(6\,|\,6\,|\,-7)$$

Demo-Text - ungekürzt

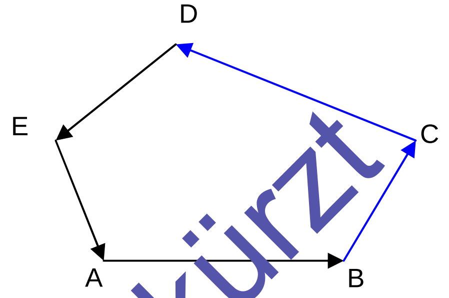
Lösung Aufgabe 11

Gegeben ist ein Fünfeck durch $A(3\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,-1\,|\,3)$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $E(4\,|\,5\,|\,5)$.

Berechne die Eckpunkte C und D sowie die fehlenden Verbindungsvektoren und vier Diagonalenvektoren. Gibt es parallele Linien?

Zeige, dass das Fünfeck drei ganz spezielle Teilvierecke enthält.

Fehlende Eckpunkte:



$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow C(5\,|\,0\,|\,7)$$

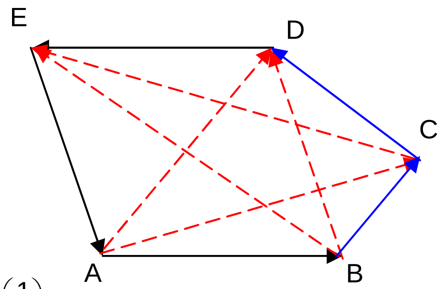
$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow D(5\,|\,3\,|\,8)$$

Parallele Seiten:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{DE} = \vec{e} - \vec{d} = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{EA} = \vec{a} - \vec{e} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\-5\end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ED}$ ist. Die Seiten AB und ED sind also parallel und sogar gleich lang. Die Skizze muss also nachträglich abgeändert werden:

Achtung: Sie ist nicht maßstäblich.



Diagonalvektoren:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$$

Jetzt gibt es noch etwas zu entdecken:

Der Vektor $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$ ist „halb so lang“ wie der Seitenvektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$.

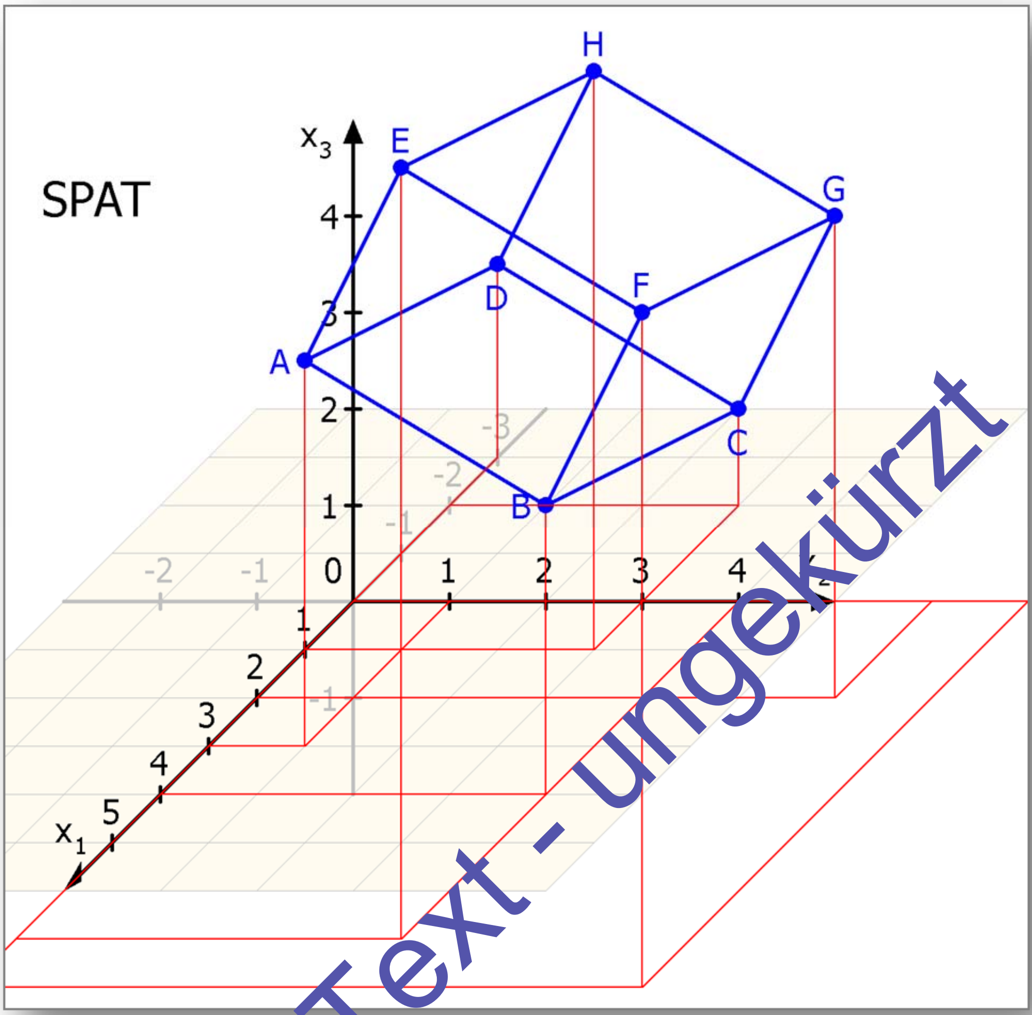
Also ist die Diagonale AD parallel zur Seite BC und doppelt so lang wie diese.

Es geht weiter: $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$ sind auch parallele Vektoren!

Die Teilfigur ABCD ist also ein Trapez, ebenso die Teilfigur BCDE, und die Teilfigur ABDE ist ein Parallelogramm. Ein verrücktes Viereck.

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 12



Demo-Text - ungekürzt

Gegeben: $A(3|1|4)$, $B(4|4|3)$, $C(-2|3|1)$ und $F(8|7|7)$.

Die Oberfläche des Spats besteht aus 6 Parallelogrammen.
Für jedes gilt die **Parallelogramm-Bedingung**:

Gesucht ist D: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \vec{d} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $D(-3|0|2)$

Gesucht ist E: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \vec{e} - \vec{a} = \vec{f} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{e} = \vec{a} + \vec{f} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $E(7|4|8)$

Gesucht ist G: $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \vec{g} - \vec{c} = \vec{f} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{c} + \vec{f} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $G(2|6|5)$

Gesucht ist H: $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \vec{h} - \vec{d} = \vec{f} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{h} = \vec{d} + \vec{f} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $H(1|3|6)$

Für jeden dieser berechneten Punkte gibt es mehrere solcher Ansätze.

Lösung Aufgabe 13

Gesucht sind Linearkombinationen aus $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$

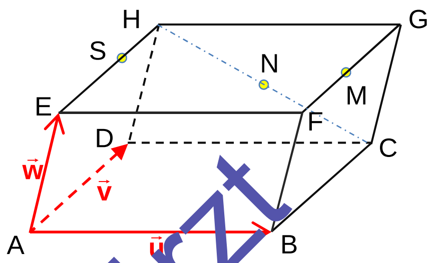
a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{u} + \vec{w}$. $\qquad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{u} + \vec{w}$

Oft ist es günstiger einen Vektor als **Differenzvektor** zu berechnen:
Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AE}$ haben denselben Anfangspunkt und der Verbindungspfeil der Spitzen zeigt von B nach E. Also ist $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \vec{w} - \vec{u}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ oder
$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u}$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \vec{u} + \vec{w} \quad \left(= \overrightarrow{AF}\right)$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{w} + \vec{v}$



b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \vec{u} + \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Zuerst eine Nebenrechnung: $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH}\right) = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$

Damit erhält man $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$\overrightarrow{BS} = -\vec{u} + \vec{w} + \frac{2}{3}\vec{v}$

$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH}\right) = \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{w}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

c) Mittelpunkt von AG: $\vec{m}_{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{g}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

Mittelpunkt von BH: $\vec{m}_{BH} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{h}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\7{,}5\end{pmatrix}$

Mittelpunkt von CE: $\vec{m}_{CE} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{e}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

Mittelpunkt von DF: $\vec{m}_{DF} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{f}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

Ergebnis: Da alle drei Raumdiagonalen denselben Mittelpunkt $Z(2{,}5 \mid 3{,}5 \mid 4{,}5)$ haben, schneiden sie sich alle vier in diesem Punkt.

Demo-Text - ungekürzt

Lösung Aufgabe 14

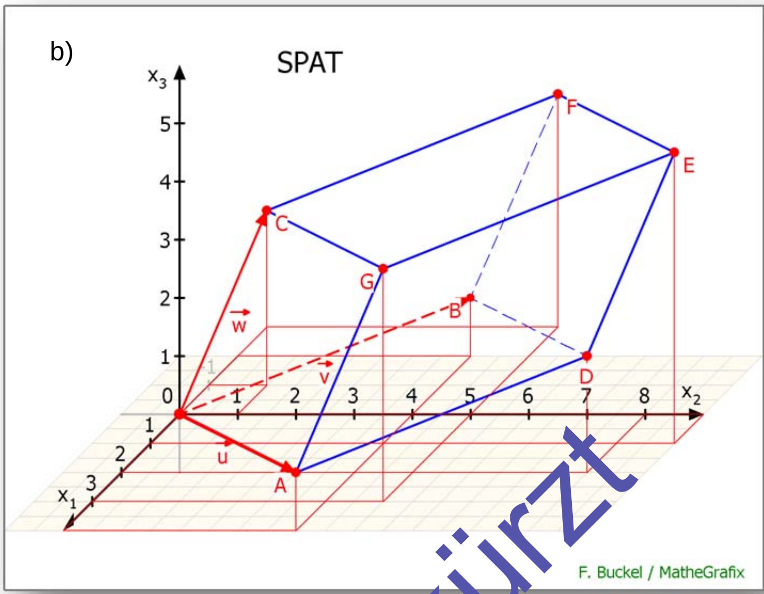
a) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{p} - \vec{a} = \frac{3}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Leftrightarrow \vec{p} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{18}{5}\\\frac{14}{5}\\\frac{17}{5}\end{pmatrix} \quad P(3{,}6 \mid 2{,}8 \mid 3{,}4)$

b) $\overrightarrow{FQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{FH} \Leftrightarrow \vec{q} - \vec{f} = \frac{1}{5}\left(\vec{h} - \vec{f}\right) \Leftrightarrow \vec{q} = \frac{4}{5}\vec{f} + \frac{1}{5}\vec{h} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix}8\\7\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{33}{5}\\\frac{31}{5}\\\frac{34}{5}\end{pmatrix} \quad Q(6{,}6 \mid 6{,}2 \mid 6{,}8)$

c) $\overrightarrow{GR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{g} = \frac{1}{4}\left(\vec{d} - \vec{g}\right) \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{3}{4}\vec{g} + \frac{1}{4}\vec{d} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{18}{4}\\\frac{17}{4}\end{pmatrix} \quad R(0{,}75 \mid 4{,}5 \mid 4{,}25)$

Lösung Aufgabe 15

a) Man kann die Punkte auf zwei verschiedene Arten berechnen.



1. Möglichkeit:

Ich berechne zuerst die „Basisvektoren“ $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h.

$D(2|8|2)$ und damit folgt

$$\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit kennt man auch $\overrightarrow{OC} = \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $C(-1|1|3)$.

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also } F(-3|5|4).$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ also } G(3|5|4)$$

2. Möglichkeit: Da die Oberfläche aus 6 Parallelogrammen besteht, kann man auch die **Parallelogrammbedingung** mehrfach anwenden:

Für D: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \vec{d} - \vec{b} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, also $D(2|8|2)$.

Für F: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \vec{f} - \vec{e} = \vec{b} - \vec{d} \Leftrightarrow \vec{f} = \vec{e} + \vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $F(-3|5|4)$.

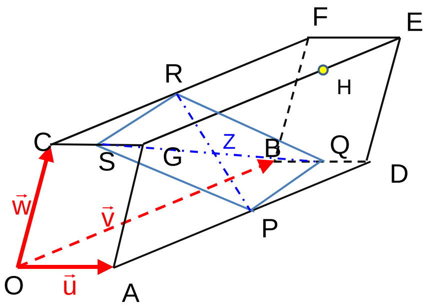
Für C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{f} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $C(-1|1|3)$.

Für G: $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \vec{g} - \vec{c} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{c} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, also $G(3|5|4)$.

Andere Berechnungswege sind möglich.

Demo-Text - ungekürzt

c) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR} = -\vec{u} + \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$



Zur Berechnung von $\overrightarrow{OZ}$ kann man verschiedene Wege einschlagen.

Man kann z. B. erkennen, dass der Pfeil $\overrightarrow{PR}$ zum gleichen Vektor gehört wie $\overrightarrow{AC}$.

Dann rechnet man so:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{w} - \vec{u}\text{ , also}\quad \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\left(\vec{w} - \vec{u}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v} + \tfrac{1}{2}\vec{w}$$

Oder man berechnet $\overrightarrow{PR}$ als Differenzvektor vom Punkt O aus:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \left(\vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\right) - \left(\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}\right) = \vec{w} - \vec{u}$$

und dann weiter wie drei Zeilen höher.

d) Darstellung des Vektors $\overrightarrow{HZ}$:

Eine Möglichkeit ist $\overrightarrow{HZ} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OH}$

Wir wissen bereits: $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

Ferner ist: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GE} = \vec{u} + \vec{w} + \frac{3}{4}\vec{v}$

Damit folgt: $\overrightarrow{HZ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} - \left(\vec{u} + \vec{w} + \frac{3}{4}\vec{v}\right) = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

Demo-Text - ungekürzt